где $\hat\rho'=\hat\rho'^+$ — оператор переменной части плотности среды. Ввиду самосопряженности этого оператора, функции (1) связаны соотношением

$$D_{12}^{+-}=D_{21}^{-+} \tag{2}$$

(и, конечно, по-прежнему обладают свойством (92,9)).

Для газа невзаимодействующих фононов (см. IX, (24,10))

$$\hat\rho'=\hat\rho'^+=\sum_{\mathbf{k}} i\left(\frac{\rho_0 k}{2u\mathcal{V}}\right)^{1/2}\left(\hat c_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{kr}-ukt)}-\hat c_{\mathbf{k}}^+e^{-i(\mathbf{kr}-ukt)}\right) \tag{3}$$

(ρ_0 — невозмущенная плотность, u — скорость звука). Подставив (3) в (1) и перейдя от суммирования к интегрированию, имеем

$$iD^{(0)-+}(t,\mathbf{r})=\frac{\rho_0}{2u}\int\left\{\langle\hat c_{\mathbf{k}}^+\hat c_{\mathbf{k}}\rangle e^{i(\mathbf{kr}-ukt)}+\langle\hat c_{\mathbf{k}}\hat c_{\mathbf{k}}^+\rangle e^{-i(\mathbf{kr}-ukt)}\right\}\frac{k\,d^3k}{(2\pi)^3},$$

или, заменив во втором члене переменную интегрирования $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$ и выразив средние значения через числа заполнения фононных состояний $N_{\mathbf{k}}$,

$$iD^{(0)-+}(t,\mathbf{r})=\int\frac{\rho_0 k}{2u}\left\{N_{\mathbf{k}}e^{-iukt}+(1+N_{-\mathbf{k}})e^{iukt}\right\}e^{i\mathbf{kr}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Подынтегральное выражение (без множителя $e^{i\mathbf{kr}}$) есть уже компонента фурье-разложения по координатам. Разложив также и по времени, получим

$$iD^{(0)-+}(\omega,\mathbf{k})=\frac{\pi\rho_0 k}{2}\left\{N_{\mathbf{k}}\delta(\omega-uk)+(1+N_{-\mathbf{k}})\delta(\omega+uk)\right\}. \tag{4}$$

Для функции же $D^{(0)+-}$ имеем, согласно (2):

$$D^{(0)+-}(\omega,\mathbf{k})=D^{(0)-+}(-\omega,-\mathbf{k}). \tag{5}$$

Еще две гриновские функции определяются как

$$iD_{12}^{--}=\langle\mathrm{T}\hat\rho_1'\hat\rho_2'\rangle,\qquad iD_{12}^{++}=\langle\tilde{\mathrm{T}}\hat\rho_1'\hat\rho_2'\rangle. \tag{6}$$

При этом

$$D_{12}^{--}=D_{21}^{--},\qquad D_{12}^{++}=D_{21}^{++}. \tag{7}$$

Для невзаимодействующих фононов аналогичное вычисление дает (ср. задачу в IX, § 31)

$$\begin{aligned}D^{(0)--}(\omega,\mathbf{k})&=-[D^{(0)++}(\omega,\mathbf{k})]^*=\\&=\frac{\rho_0 k}{2u}\left[\frac{1}{\omega-uk+i0}-\frac{1}{\omega+uk-i0}\right]-2\pi i\left[N_{\mathbf{k}}\delta(\omega-uk)+N_{-\mathbf{k}}\delta(\omega+uk)\right].\end{aligned} \tag{8}$$

В согласии с (7), $D^{(0)--}(\omega,\mathbf{k})=D^{(0)--}(-\omega,-\mathbf{k})$.

Из (8) следует, что в координатном представлении функция $D^{(0)--}(t,\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-u^2\Delta\right)D^{(0)--}(t,\mathbf{r})=\rho_0\delta(t)\,\Delta\delta(\mathbf{r}), \tag{9}$$

заменяющему уравнение (92,14) для гриновских функций обычных частиц.

§ 93. Диаграммная техника для неравновесных систем

Всякая диаграммная техника основана на выделении из гамильтониана системы оператора взаимодействия: $\hat H=\hat H_0+\hat V$, где $\hat H_0$ — гамильтониан системы невзаимодействующих частиц. Диаграммная техника есть теория возмущений по $\hat V$.

Ее построение для неравновесной системы осуществляется по тому же пути, по которому это делалось в равновесном случае, при $T=0$[1]). Гриновская функция $G \equiv G^{--}$ выражается через Ψ-операторы в представлении взаимодействия (т. е. для идеального газа) формулой

$$iG_{12}^{--} = \langle \hat{S}^{-1} \mathrm{T} [\hat{\Psi}_{01} \hat{\Psi}_{02}^{+} \hat{S}] \rangle, \tag{93,1}$$

где

$$\hat{S} \equiv \hat{S}(\infty, -\infty) = \mathrm{T} \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}_0(t)\, dt \right), \tag{93,2}$$

а $\hat{V}_0(t)$ — оператор $\hat{V}$ в представлении взаимодействия. Усреднение в (93,1) производится по некоторому состоянию системы невзаимодействующих частиц. Для дальнейшего будет удобнее предположить, что это состояние является стационарным и однородным, но не основным (мы увидим далее, что это начальное состояние можно исключить и сформулировать теорию так, что уравнения вообще не будут от него зависеть). В этом разница со случаем $T=0$, когда усреднение производится по основному состоянию. Это отличие очень существенно: усреднение оператора $\hat{S}^{-1}$ уже нельзя отделить от усреднения остальных множителей (как это было сделано в IX, § 12, при переходе от (12,12) к (12,14)); дело в том, что неосновное состояние под влиянием оператора $\hat{S}^{-1}$ переходит не само в себя, а в некоторую суперпозицию других возбужденных состояний (которые могут наглядно рассматриваться как результат всевозможных процессов взаимного рассеяния квазичастиц[2]).

Выражение (93,1) должно быть разложено по степеням $\hat{V}$. При этом удобно сначала преобразовать $\hat{S}^{-1}$, используя унитарность оператора $\hat{S}$:

$$\hat{S}^{-1} = \hat{S}^{+} = \tilde{\mathrm{T}} \exp\left(i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(t)\, dt \right) \tag{93,3}$$

(использована также эрмитовость оператора $\hat{V}$); символ $\tilde{\mathrm{T}}$ антихронологического упорядочения был уже введен в предыдущем параграфе.

---

[1]) Дальнейшее изложение существенно опирается на изложение в IX, §§ 12, 13.

[2]) Заметим, что по такой же причине изложенная в IX, §§ 12, 13, диаграммная техника, вообще говоря, неприменима даже при $T=0$ в случае наличия внешних переменных полей (т. е. когда оператор $\hat{V}$ зависит явно от времени уже в шредингеровском представлении): переменные поля возбуждают основное состояние системы. Подчеркнем в то же время, что развиваемая здесь техника пригодна и при наличии переменного поля.

Разложив $\hat{S}$ и $\hat{S}^{-1}$ в ряды и подставив их в (93,1), мы получим сумму различных членов, в каждом из которых надо произвести усреднение с помощью теоремы Вика, и каждому способу попарных сверток Ψ-операторов сопоставляется определенная диаграмма[1]).

Заметим прежде всего, что (как и в диаграммной технике при $T=0$, которую будем называть «обычной») следует учитывать только связные диаграммы, не содержащие отсоединенных вакуумных петель. Вакуумные же петли взаимно сокращаются. В этом легко убедиться, рассмотрев несколько первых диаграмм, по которым можно усмотреть общий принцип такого сокращения.

Если все свертки, приводящие к связной диаграмме, производятся внутри множителя $\mathrm{T}\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_2^+\hat{S}$ в (93,1), то мы получим члены, изображающиеся описанными в IX, § 13, обычными диаграммами (разумеется, с другим конкретным видом функций, отвечающих сплошным линиям). Напомним, что речь идет здесь о диаграммах в координатном представлении; для неравновесных состояний (когда G-функции зависят от переменных X_1 и X_2 по отдельности) переход к импульсному представлению неудобен. Другие члены возникают от свертываний, в которых участвуют также и Ψ-операторы из $\hat{S}^{-1}=\hat{S}^+$. В каждом порядке теории возмущений они получаются из обычных членов заменой любого множителя $\hat{V}$, взятого из $\hat{S}$, на множитель $\hat{V}$ из $\hat{S}^+$. Эти члены изображаются диаграммами того же графического вида, но с несколько измененным правилом их прочтения. Эти изменения являются следствием трех обстоятельств: 1) в $\hat{S}^+$ операторы взаимодействия входят в виде $+i\hat{V}$ (вместо $-i\hat{V}$ в $\hat{S}$); 2) все Ψ-операторы в $\hat{S}^+$ стоят всегда левее операторов в произведении $\mathrm{T}\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_2^+\hat{S}$; 3) внутри множителя $\hat{S}^+$ операторы упорядочены знаком $\tilde{\mathrm{T}}$-произведения (вместо T).

Проследим, как эти изменения проявляются при построении диаграммной техники в простейшем случае — для системы частиц (скажем, фермионов), находящихся во внешнем поле $U(t, \mathbf{r}) \equiv U(X)$.

Члены первого порядка в разложении выражения (93,1):

$$\left\langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_2^+\left(-i\int \hat{\Psi}_3^+U_3\hat{\Psi}_3 d^4X_3\right)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathrm{T}} i\int \hat{\Psi}_3^+U_3\hat{\Psi}_3 d^4X_3\cdot \mathrm{T}\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_2^+\right\rangle.$$

Для рассматриваемой здесь ситуации характерен второй член в этой сумме; при усреднении по основному состоянию должен был бы рассматриваться только первый член. В первом члене

[1]) Напомним, что в макроскопическом пределе справедливость теоремы Вика не связана с тем, по какому однородному стационарному состоянию производится усреднение — см. конец IX, § 13.

все четыре Ψ-оператора находятся под знаком Т-произведения; их попарные свертки,

$$\mathrm{T}\Psi_1\Psi_2^+(-i\Psi_3^+U_3\Psi_3), \qquad (93,4)$$

дают множители $G_{32}^{(0)--}$ и $G_{13}^{(0)--}$. Во втором же члене сворачиваемые Ψ-операторы не упорядочены друг с другом знаком Т или $\tilde{\mathrm{T}}$:

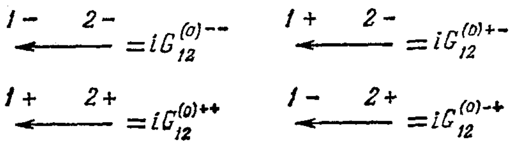
$$\tilde{\mathrm{T}}(i\Psi_3^+U_3\Psi_3)\,\mathrm{T}(\Psi_1\Psi_2^+); \qquad (93,5)$$

их свертки дают множители $G_{32}^{(0)+-}$ и $G_{13}^{(0)--}$; кроме того, здесь стоит $+iU_3$ вместо $-iU_3$.

Введем графические элементы, отличающиеся от фигурировавших в обычной диаграммной технике дополнительными индексами + или — на концах линий. Пунктирные линии с индексами + или — на одном из концов (вершине диаграммы) означают множитель $+iU(X)$ или $-iU(X)$:

(93,6)

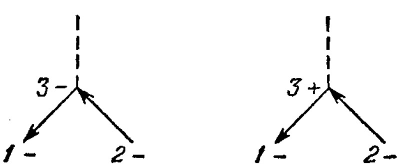
(ср. IX, § 19). Сплошным линиям с индексами ± на обоих концах сопоставляются различные G-функции:



(93,7)

Цифры на концах линий нумеруют аргументы функций — переменные X_1, X_2.

Тогда два члена (93,4—5) изобразятся диаграммами

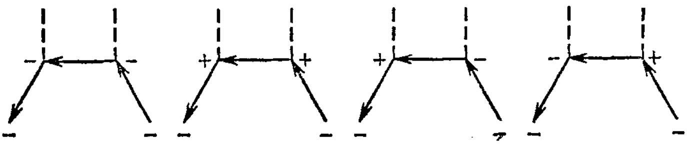


(93,8)

Двум внешним концам сплошных линий приписываются индексы — соответственно тому, что речь идет о поправках в функции G^{--}. По переменным, отвечающим вершине диаграммы, подразумевается интегрирование[1]). В аналитическом виде:

$$iG^{(1)--}_{12} = \int \{iG^{(0)--}_{13} iG^{(0)--}_{32} (-iU_3) + iG^{(0)-+}_{13} iG^{(0)+-}_{32} iU_3\} \, d^4X_3. \quad (93,9)$$

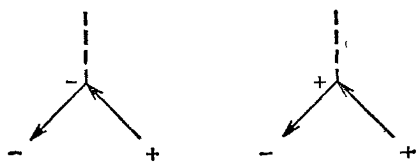
В следующем, втором, порядке теории возмущений поправка в функции G^{--} дается четырьмя диаграммами:



(93,10)

(цифровые индексы опущены). Индекс $\pm$ в каждой вершине диаграммы относится к концам всех трех сходящихся в ней линий.

Аналогичным образом, поправочные члены в других G-функциях изобразятся диаграммами с другими индексами у двух внешних концов сплошных линий. Так, для функции G^{-+} в первом порядке имеем две диаграммы:



(93,11)

Таким образом, диаграммы в технике Келдыша получаются из диаграмм обычной техники приписыванием в их вершинах и свободных концах всеми возможными способами дополнительных индексов $+$ или $-$. Это правило остается в силе и в диаграммной технике при других типах взаимодействия.

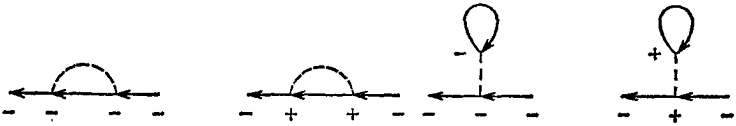
Для системы с парным взаимодействием между частицами в обычной диаграммной технике внутренней пунктирной линии сопоставляется потенциал взаимодействия двух частиц. Теперь концам такой линии приписывается еще пара одинаковых индексов $+$ или $-$:

$$\overset{1+\qquad\quad 2+}{\text{- - - - - -}} = iU(X_1-X_2) \equiv i\delta(t_1-t_2)U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$$

$$\overset{1-\qquad\quad 2-}{\text{- - - - - -}} = -iU(X_1-X_2) \quad (93,12)$$

[1]) Точнее — интегрирование по $dt\,d^3x$ и суммирование по паре одинаковых спиновых индексов. Последнее будем подразумевать ниже включенным в интегрирование по d^4X.

Так, поправка первого порядка в функции G^{--} для системы с парным взаимодействием изобразится суммой четырех диаграмм:



(93,13)

(вместо двух диаграмм IX, (13,13) обычной техники). Сплошной линии, замкнутой самой на себя, по-прежнему сопоставляется множитель $N_0(\mu, T)$ (плотность идеального газа) при любом знаке вершины.

Уже упоминалось, что диаграммная техника Келдыша применима также и к равновесным системам при $T \neq 0$. Предположим, что внешнее поле отсутствует и перейдем от координатного к импульсному представлению, разложив все G-функции в интегралы Фурье. Тогда, обычным образом, каждой линии на диаграммах приписывается определенный «4-импульс» и этим линиям сопоставляются, по тем же правилам, функции $U(Q)$, $G^{(0)}(P)$ в импульсном представлении.

При $T=0$ функция распределения Ферми

$$n_{\mathbf{p}} = \begin{cases} 1, & p < p_F, \\ 0, & p > p_F. \end{cases}$$

Поэтому, согласно (92,20—21), для ферми-системы при $T=0$

$$G^{(0)-+}(P) = 0 \text{ при } p > p_F, \qquad G^{(0)+-}(P) = 0 \text{ при } p < p_F$$

и все диаграммы для G^{--}, содержащие «плюсовые» вершины, обращаются тождественно в нуль. Таким образом, диаграммная техника Келдыша в применении к равновесным системам (в отличие от мацубаровской техники) непосредственно переходит при $T=0$ в обычную диаграммную технику.

§ 94. Собственно-энергетические функции

Как и всякая «разумная» диаграммная техника, техника Келдыша позволяет проводить суммирования диаграмм «блоками». Важнейшими такими блоками являются так называемые собственно-энергетические функции.

Напомним (см. IX, § 14), что это понятие возникает при рассмотрении диаграмм для гриновской функции, которые нельзя разделить на две части, соединенные лишь одной сплошной линией. Выделив множители $iG^{(0)}$, отвечающие двум концевым линиям такой диаграммы, представим ее (в координатном пред-