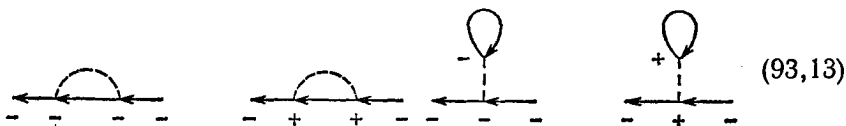


Так, поправка первого порядка в функции G^{--} для системы с парным взаимодействием изобразится суммой четырех диаграмм:



(вместо двух диаграмм IX, (13,13) обычной техники). Сплошной линией, замкнутой самой на себя, по-прежнему сопоставляется множитель $N_0(\mu, T)$ (плотность идеального газа) при любом знаке вершины.

Уже упоминалось, что диаграммная техника Келдыша применима также и к равновесным системам при $T \neq 0$. Предположим, что внешнее поле отсутствует и перейдем от координатного к импульсному представлению, разложив все G -функции в интегралы Фурье. Тогда, обычным образом, каждой линии на диаграммах приписывается определенный «4-импульс» и этим линиям сопоставляются, по тем же правилам, функции $U(Q)$, $G^{(0)}(P)$ в импульсном представлении.

При $T=0$ функция распределения Ферми

$$n_p = \begin{cases} 1, & p < p_F, \\ 0, & p > p_F. \end{cases}$$

Поэтому, согласно (92,20—21), для ферми-системы при $T=0$

$$G^{(0)-+}(P) = 0 \text{ при } p > p_F, \quad G^{(0)+-}(P) = 0 \text{ при } p < p_F$$

и все диаграммы для G^{--} , содержащие «плюсовые» вершины, обращаются тождественно в нуль. Таким образом, диаграммная техника Келдыша в применении к равновесным системам (в отличие от мацубаровской техники) непосредственно переходит при $T=0$ в обычную диаграммную технику.

§ 94. Собственно-энергетические функции

Как и всякая «разумная» диаграммная техника, техника Келдыша позволяет проводить суммирование диаграмм «блоками». Важнейшими такими блоками являются так называемые собственно-энергетические функции.

Напомним (см. IX, § 14), что это понятие возникает при рассмотрении диаграмм для гриновской функции, которые нельзя разделить на две части, соединенные лишь одной сплошной линией. Выделив множители $iG^{(0)}$, отвечающие двум концевым линиям такой диаграммы, представим ее (в координатном пред-

ставлении, как функцию двух аргументов X_1, X_2) в виде

$$\int iG_{13}^{(0)} (-i\Sigma_{34}) iG_{42}^{(0)} d^4 X_3 d^4 X_4.$$

Функцию $-i\Sigma_{34}$, представляющую всю внутреннюю часть диаграммы, называют *собственно-энергетической*. Точная же собственно-энергетическая функция (которую и обозначают посредством $-i\Sigma$) определяется суммой всех возможных диаграмм указанного типа. В соответствии с тем, что в излагаемой технике каждой вершине диаграммы должен еще быть приписан знак $+$ или $-$, существуют четыре точные собственно-энергетические функции, в соответствии со знаками их «выходной» и «входной» вершин; обозначим их как Σ^{--} , Σ^{++} , Σ^{-+} , Σ^{+-} .

Точные G -функции выражаются через точные Σ -функции тождествами, которые можно записать в графическом виде: для функции G^{--}

$$(94,1)$$

и аналогично для остальных функций (жирные линии — точные G -функции, кружки — Σ -функции; ср. IX, (14,4)). В аналитическом виде:

$$G_{12}^{--} = G_{12}^{(0) --} + \int \{ G_{14}^{(0) --} \Sigma_{43}^{--} G_{32}^{--} + G_{14}^{(0) -+} \Sigma_{43}^{++} G_{32}^{+-} + G_{14}^{(0) -+} \Sigma_{43}^{+-} G_{32}^{--} + G_{14}^{(0) --} \Sigma_{43}^{+-} G_{32}^{+-} \} d^4 X_3 d^4 X_4 \quad (94,2)$$

и еще три уравнения для остальных G -функций.

Для компактной записи таких уравнений целесообразно ввести матрицы

$$G = \begin{pmatrix} G^{--} & G^{-+} \\ G^{+-} & G^{++} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{--} & \Sigma^{-+} \\ \Sigma^{+-} & \Sigma^{++} \end{pmatrix}. \quad (94,3)$$

Тогда четыре уравнения вида (94,2) запишутся совместно как одно матричное уравнение

$$G_{12} = G_{12}^{(0)} + \int G_{14}^{(0)} \Sigma_{43} G_{32} d^4 X_3 d^4 X_4; \quad (94,4)$$

множители под знаком интеграла перемножаются по правилу матричного умножения.

Аналогичным образом записываются совместно уравнения (92,14 — 18), которым удовлетворяют G -функции идеального газа:

$$\hat{G}_{01}^{-1} G_{12}^{(0)} = \sigma_2 \delta(X_1 - X_2), \quad (94,5)$$

где ²⁾

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вернемся к уравнению (94,4) и подействуем на обе его стороны оператором \hat{G}_{01}^{-1} . Учитывая (94,5), получим в результате систему четырех интегро-дифференциальных уравнений, записанных в виде одного матричного уравнения:

$$\hat{G}_{01}^{-1}G_{12} = \sigma_z \delta(X_1 - X_2) + \int \sigma_z \Sigma_{13} G_{32} d^4 X_3. \quad (94,6)$$

Отметим, что это уравнение можно представить и в другом, эквивалентном виде, если заметить, что в диаграммной записи (94,1) можно с тем же успехом изображать жирные линии слева (а не справа, как в (94,1)). Другими словами, в (94,2) можно писать множители в каждом члене подынтегрального выражения в порядке $G_{14} \Sigma_{43} G_{32}^{(0)}$. Подействовав на представленные в таком виде равенства оператором \hat{G}_{02}^{-1*} (см. примечание на стр. 472), получим

$$\hat{G}_{02}^{-1*}G_{12} = \sigma_z \delta(X_1 - X_2) + \int G_{13} \Sigma_{32} \sigma_z d^4 X_3. \quad (94,7)$$

Собственно-энергетические функции сами могут быть представлены в виде ряда скелетных диаграмм, графическим элементом которых — жирным сплошным линиям — отвечают точные G -функции. Так, для системы частиц с парным взаимодействием:

$$-i\Sigma^{--} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} + \dots \quad (94,8)$$

$$-i\Sigma^{+-} = \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} + \dots \quad (94,9)$$

и аналогично для Σ^{++} и Σ^{+-} ; дальнейшие члены ряда содержат диаграммы с большим числом пунктирных линий ²⁾. Таким образом, уравнения (94,4) или (94,7) представляют собой полную, хотя и очень сложную систему уравнений для точных G -функций.

¹⁾ Обозначение σ_z , заимствованное из стандартных обозначений матрицы Паули, не имеет здесь, конечно, никакого отношения к спину.

²⁾ Ср. IX, (14,9—10); все перечисленные там диаграммы первого и второго порядков входят в скелетные диаграммы (94,8).

Уравнения (94,6) не содержат вовсе функций $G^{(0)}$, зависящих от выбора «нулевого» состояния системы невзаимодействующих частиц. Таким образом, всякая зависимость от этого выбора исчезает. Но наличие в уравнениях дифференциальных операций приводит к неоднозначности их решений. Эта неоднозначность проявляется присутствием функций $G^{(0)}$ в интегральных уравнениях (94,4).

Система уравнений (94,6) имеет, однако, тот недостаток, что в ней не учтена еще в явном виде линейная зависимость G -функций, выражаемая равенством (92,7). Для устранения этого недостатка надо произвести линейное преобразование матрицы G таким образом, чтобы, используя (92,7), обратить один из ее элементов в нуль. Такое преобразование осуществляется формулой

$$G' = R^{-1}GR, \quad (94,10)$$

где

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что преобразованная матрица

$$G' = \begin{pmatrix} 0 & G^A \\ G^R & F \end{pmatrix}, \quad (94,11)$$

где

$$F = G^{++} + G^{--} = G^{+-} + G^{-+}. \quad (94,12)$$

Преобразовав таким же образом матрицы $G^{(0)}$ и Σ , мы оставим уравнение (94,4) инвариантным.

Преобразованная матрица Σ :

$$\Sigma' = R^{-1}GR = \begin{pmatrix} \Omega & \Sigma^R \\ \Sigma^A & 0 \end{pmatrix}, \quad (94,13)$$

где обозначено

$$\Omega = \Sigma^{--} + \Sigma^{++}, \quad \Sigma^R = \Sigma^{--} + \Sigma^{-+}, \quad \Sigma^A = \Sigma^{--} + \Sigma^{+-}. \quad (94,14)$$

В этом можно убедиться прямым вычислением с учетом равенства

$$\Sigma^{++} + \Sigma^{--} = -(\Sigma^{+-} + \Sigma^{-+}), \quad (94,15)$$

являющегося следствием равенства (92,7) (его легко получить, приравняв нулю выражение

$$\hat{G}_{01}^{-1}(G^{--} + G^{++} - G^{-+} - G^{+-}),$$

составленное с помощью уравнений (94,6)).

Раскрыв теперь преобразованное матричное уравнение (94,4), получим три уравнения. Одно из них:

$$G_{12}^A = G_{12}^{(0)A} + \int G_{14}^{(0)A} \Sigma_{43}^A G_{32}^A d^4 X_3 d^4 X_4. \quad (94,16)$$

Такое же уравнение для G^R не дает ничего нового, так как оно является просто «эрмитово-сопряженным» по отношению к уравнению (94,16). Подчеркнем, что это уравнение, хотя в нем и фигурирует относящаяся к идеальному газу функция $G^{(0)A}$, не зависит от «нулевого» состояния, поскольку функция $G^{(0)A}$ от этого состояния не зависит (как это было отмечено в § 92).

Наконец, получающееся из (94,4) третье уравнение для функции F содержит члены с функцией $F^{(0)}$, зависящей от «нулевого» состояния. Эти члены, однако, исчезают при воздействии на них дифференциального оператора \hat{G}_{01}^{-1} , поскольку $\hat{G}_{01}^{-1}F^{(0)}=0$. В результате получим уравнение

$$\hat{G}_{01}^{-1}F_{12} = \int \{ \Omega_{13} G_{02}^A + \Sigma_{13}^R F_{32} \} d^4 X_3. \quad (94,17)$$

Уравнения (94,16—17) составляют полную систему, описывающую в принципе поведение неравновесной системы. Второе из них — интегро-дифференциальное и представляет собой обобщение кинетического уравнения Больцмана; напомним в этой связи, что согласно (92,5—6) функции G^{-+} и G^{+-} , а с ними и F , непосредственно связаны с функцией распределения частиц в системе. Решение уравнения (94,17) содержит произвол, соответствующий произволу в решении кинетического уравнения. Уравнение же (94,16) — чисто интегральное и не вносит поэтому никакого дополнительного произвола в решение системы.

Отметим, однако, принципиальную особенность уравнений (94,16—17), отличающую их в общем случае от обычного кинетического уравнения: они содержат две, вместо одной, временных переменных t_1 и t_2 . В следующем параграфе будет показано, каким образом это различие устраняется в квазиклассическом случае.

§ 95. Кинетическое уравнение в диаграммной технике

Покажем на простом примере, каким образом осуществляется переход от уравнений типа (94,16—17) к обычному квазиклассическому кинетическому уравнению. Мы рассмотрим слабо неидеальный ферми-газ при температурах $T \sim \varepsilon_F$, предполагаемая выполненными условия квазиклассичности: промежутки времени τ и расстояния L , на которых существенно меняются все величины, удовлетворяют неравенствам

$$\tau \varepsilon_F \gg 1, \quad L p_F \gg 1 \quad (95,1)$$

(ср. § 40). Хотя мы, естественно, не получим в этом случае ничего нового, вывод содержит поучительные моменты, полезные и в более сложных случаях.