Такое же уравнение для G^R не дает ничего нового, так как оно является просто «эрмитово-сопряженным» по отношению к уравнению (94,16). Подчеркнем, что это уравнение, хотя в нем и фигурирует относящаяся к идеальному газу функция $G^{(0)A}$, не зависит от «нулевого» состояния, поскольку функция $G^{(0)A}$ от этого состояния не зависит (как это было отмечено в § 92).

Наконец, получающееся из (94,4) третье уравнение для функции F содержит члены с функцией $F^{(0)}$, зависящей от «нулевого» состояния. Эти члены, однако, исчезают при воздействии на них дифференциального оператора $\hat{G}_{01}^{-1}$, поскольку $\hat{G}_{01}^{-1}F^{(0)}=0$. В результате получим уравнение

$$\hat{G}_{01}^{-1}F_{12}=\int \{\Omega_{13}G_{02}^{A}+\Sigma_{13}^{R}F_{32}\}d^4X_3. \qquad (94,17)$$

Уравнения (94,16—17) составляют полную систему, описывающую в принципе поведение неравновесной системы. Второе из них — интегро-дифференциальное и представляет собой обобщение кинетического уравнения Больцмана; напомним в этой связи, что согласно (92,5—6) функции G^{-+} и G^{+-}, а с ними и F, непосредственно связаны с функцией распределения частиц в системе. Решение уравнения (94,17) содержит произвол, соответствующий произволу в решении кинетического уравнения. Уравнение же (94,16) — чисто интегральное и не вносит поэтому никакого дополнительного произвола в решение системы.

Отметим, однако, принципиальную особенность уравнений (94,16—17), отличающую их в общем случае от обычного кинетического уравнения: они содержат две, вместо одной, временных переменных t_1 и t_2. В следующем параграфе будет показано, каким образом это различие устраняется в квазиклассическом случае.

§ 95. Кинетическое уравнение в диаграммной технике

Покажем на простом примере, каким образом осуществляется переход от уравнений типа (94,16—17) к обычному квазиклассическому кинетическому уравнению. Мы рассмотрим слабо неидеальный ферми-газ при температурах $T\sim\varepsilon_F$, предполагая выполненными условия квазиклассичности: промежутки времени τ и расстояния L, на которых существенно меняются все величины, удовлетворяют неравенствам

$$\tau\varepsilon_F\gg 1, \quad Lp_F\gg 1 \qquad (95,1)$$

(ср. § 40). Хотя мы, естественно, не получим в этом случае ничего нового, вывод содержит поучительные моменты, полезные и в более сложных случаях.

Квантовое кинетическое уравнение должно определять одночастичную матрицу плотности $\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Для перехода к квазиклассическому случаю целесообразно воспользоваться ее смешанным координатно-импульсным представлением, произведя фурье-разложение по разности $\xi = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и оставив координатную зависимость от $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$. При этом

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \frac{\xi}{2}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \frac{\xi}{2},$$

так что соответствующий фурье-образ есть

$$\frac{1}{\mathcal{N}} n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int e^{-i\mathbf{p}\xi} \rho\left(t, \mathbf{r} + \frac{\xi}{2}; \mathbf{r} - \frac{\xi}{2}\right) d^3\xi. \tag{95,2}$$

Обратное преобразование:

$$\rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} n\left(t, \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{p}\right) \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{95,3}$$

Интегрирование функции $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ по координатам дает функцию распределения частиц по импульсам, как это видно из выражения этого интеграла через исходную матрицу плотности:

$$N_\mathbf{p} = \int n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3x = \mathcal{N} \int e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \rho(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3x_1 d^3x_2. \tag{95,4}$$

Интегрирование же по импульсам дает распределение по координатам, т. е. пространственную плотность числа частиц, как это снова видно из выражения через матрицу плотности:

$$N(t, \mathbf{r}) = \int n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3p = \mathcal{N} \rho(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}). \tag{95,5}$$

Самое же функцию $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ в общем квантовом случае отнюдь нельзя рассматривать как функцию распределения по координатам и импульсам одновременно; не говоря уже о том, что это противоречило бы основным принципам квантовой механики, определенная согласно (95,2) функция $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ в общем случае даже не положительна).

Функция $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ имеет, однако, буквальный смысл функции распределения в квазиклассическом приближении. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим оператор какой-либо физической величины, относящейся к отдельной частице и зависящей от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$: $\hat{f} = f(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}) = f(\mathbf{r}, -i\nabla)$ [1]). По определению матрицы плотности,

---

[1]) Для определенности можно считать, что все операторы ∇ стоят правее $\mathbf{r}$. В квазиклассическом приближении это несущественно.

среднее значение величины f дается интегралом

$$\bar{f}=\int[\hat{f}_1\rho(t,\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}}d^3x,$$

где $\hat{f}_1$ действует на переменную $\mathbf{r}_1$. Подставим сюда ρ в виде (95,3) и учтем, что при условиях (95,1) n является более медленно меняющейся функцией $\mathbf{r}_1$, чем множитель $\exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}_1)$. Поэтому достаточно дифференцировать только последний, что сводится к замене $-i\nabla_1\to\mathbf{p}$. Тогда выражение $\bar{f}$ примет вид

$$\bar{f}=\frac{1}{\mathcal{N}}\int f(\mathbf{r},\ \mathbf{p})\,n(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{p})\,d^3x\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \tag{95,6}$$

что (ввиду произвольности f) как раз соответствует определению классической функции распределения.

Ниже мы будем писать уравнения для гриновской функции $G^{-+}(X_1,\ X_2)$, наиболее тесно связанной (согласно (92,5)) с матрицей плотности. Введем для нее «четырехмерное» смешанное представление

$$G^{-+}(X,\ P)=\int e^{iP\Xi}G^{-+}\left(X+\frac{1}{2}\Xi,\ X-\frac{1}{2}\Xi\right)d^4\Xi, \tag{95,7}$$

где $P=(\omega,\ \mathbf{p})$, $X=(t,\ \mathbf{r})$, $\Xi=(\xi_0,\ \boldsymbol{\xi})$, причем $t=(t_1+t_2)/2$, $\xi_0=t_1-t_2$. Тогда

$$n(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{p})=-i\int G^{-+}(X,\ P)\frac{d\omega}{2\pi}; \tag{95,8}$$

интегрирование по $d\omega/2\pi$ эквивалентно тому, что полагается $t_1=t_2$.

После этих предварительных определений, перейдем к выводу кинетического уравнения.

Возьмем $(-+)$-компоненту уравнений (94,6) и (94,7) и составим их почленную разность:

$$(\hat{G}_{02}^{-1*}-\hat{G}_{01}^{-1})\,G_{12}^{-+}=$$
$$=-\int(\Sigma_{13}^{--}G_{32}^{-+}+\Sigma_{13}^{-+}G_{32}^{++}+G_{13}^{-+}\Sigma_{32}^{++}+G_{13}^{--}\Sigma_{32}^{-+})\,d^4X_3. \tag{95,9}$$

Оператор, действующий на функцию G_{12}^{-+} в левой стороне уравнения:

$$\hat{G}_{02}^{-1*}-\hat{G}_{01}^{-1}=-i\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\partial}{\partial t_2}\right)-\frac{1}{2m}(\Delta_1-\Delta_2)=-i\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{i}{m}\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\right).$$

Перейдем теперь в обеих сторонах уравнения (95,9) к фурье-компонентам (95,7) и положим $t_1=t_2$ (или, что то же, проинтегрируем по $d\omega/2\pi$). С учетом (95,8) найдем, что левая сторона уравнения (95,9) примет в результате вид

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}$$

— как раз требуемый вид левой стороны кинетического уравнения для функции распределения $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$. Правая же часть уравнения (95,9) после фурье-преобразования должна поэтому дать интеграл столкновений, $\operatorname{St} n$.

Переход к фурье-компонентам в этой части должен быть произведен с учетом условий квазиклассичности. Интеграл в (95,9) представляет собой сумму членов вида

$$\int \Sigma(X_1, X_3)\, G(X_3, X_2)\, d^4X_3.$$

Выразим множители Σ и G в виде функций от разностей и полусумм «4-координат»:

$$\int \Sigma\left(X_1-X_3, \frac{X_1+X_3}{2}\right) G\left(X_3-X_2, \frac{X_3+X_2}{2}\right) d^4X_3.$$

При переходе к фурье-компонентам по первым аргументам существенна область значений разностей координат $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|$, $|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|\sim 1/p$ и разностей времен $|t_1-t_3|$, $|t_3-t_2|\sim 1/\varepsilon$. Согласно условиям (95,1), на этих интервалах Σ и G как функции своих вторых аргументов меняются мало. Поэтому можно приближенно заменить эти аргументы значениями $X=(X_1+X_2)/2$:

$$\int \Sigma(X_1-X_3, X)\, G(X_3-X_2, X)\, d^4X_3,$$

после чего можно переходить к фурье-представлению при заданном значении X. В результате правая сторона уравнения (95,9) примет вид

$$\operatorname{St} n=-\int\{\Sigma^{-+}(G^{--}+G^{++})+(\Sigma^{--}+\Sigma^{++})G^{-+}\}\frac{d\omega}{2\pi}=$$
$$=\int\{-\Sigma^{-+}G^{+-}+\Sigma^{+-}G^{-+}\}\frac{d\omega}{2\pi}, \quad (95,10)$$

где все функции в подынтегральном выражении имеют одинаковые аргументы $(X, P)\equiv(t, \mathbf{r}; \omega, \mathbf{p})$; во втором равенстве использованы соотношения (92,7) и (94,15).

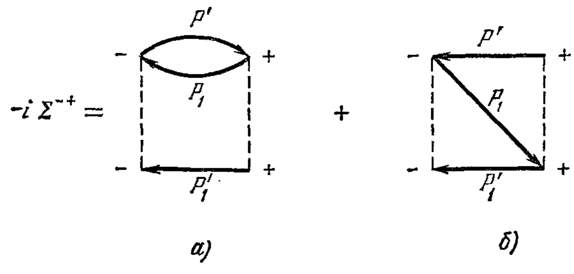
Применим формулу (95,10) к модели почти идеального ферми-газа, рассматривавшейся уже в IX, §§ 6, 21. Как и там, будем условно считать, что потенциал $U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ взаимодействия между частицами удовлетворяет условию применимости теории возмущений; для перехода к истинному взаимодействию (не удовлетворяющему этому условию) достаточно выразить ответ через амплитуду рассеяния.

Имея в виду найти интеграл столкновений в первом неисчезающем приближении теории возмущений по взаимодействию частиц, можно считать, что точные G-функции в (95,10) связаны с функцией распределения n теми же формулами (92,20—21), что и в идеальном газе; это означает пренебрежение малыми поправками за счет взаимодействия к энергии $\varepsilon = p^2/2m$ частицы газа. Выражения (92,20—21) относятся, строго говоря, к однородному и стационарному состоянию газа, но в квазиклассическом случае, ввиду медленности изменения n с координатами и временем, можно пользоваться теми же выражениями, понимая в них в качестве $n_{\mathbf{p}}$ функцию $n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, в которой t и $\mathbf{r}$ играют роль параметров. Интегрирование по ω устраняет δ-функции и получается

$$\operatorname{St} n = i\Sigma^{-+}(\varepsilon-\mu, \mathbf{p}; t, \mathbf{r})[1-n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})] + i\Sigma^{+-}(\varepsilon-\mu, \mathbf{p}; t, \mathbf{r})\, n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (95,11)$$

Уже из самого вида этого выражения ясно, что первый член в нем описывает «приход» частиц, возможный лишь при $1-n \neq 0$; второй же член описывает «уход», пропорциональный n. Остается вычислить собственно-энергетические функции Σ^{-+} и Σ^{+-}.

Первый неисчезающий вклад в них дают диаграммы второго порядка (ср. (94,9)); так,



(95,12)

где $P_1' = P + P_1 - P'$. После замены U на U_0 (см. ниже) вклады в Σ от этих двух диаграмм связаны друг с другом равенством $\Sigma_a = -2\Sigma_б$ (минус — из-за замкнутой петли в диаграмме a, а коэффициент 2 — из-за спинового суммирования в этой петле; ср. аналогичные вычисления в IX, § 21). Раскрыв диаграмму $б$ в аналитическом виде, получим

$$i\Sigma^{-+}(P) = \int G^{-+}(P')\,G^{+-}(P_1)\,G^{-+}(P_1')\,U^2(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')\,\frac{d^4P_1\, d^4P'}{(2\pi)^8}.$$

В вырожденном газе длина волны частиц ($\sim 1/p$) автоматически велика по сравнению с радиусом сил взаимодействия в силу условия разреженности газа (см. IX, § 6); это позволяет заменить $U(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')$ на значение при $\mathbf{p}_1-\mathbf{p}'=0$:

$$U_0 \equiv \int U(r)\,d^3x.$$

Подставив для функций G^{-+} и G^{+-} выражения (92,20—21) и устранив две δ-функции интегрированием по «временным» компонентам 4-векторов P_1 и P', убедимся в том, что первый член в (95,11) действительно совпадает с членом «прихода» в интеграле столкновений (74,5) (причем $w=2\pi U_0^2$). Аналогичным образом вычисляется Σ^{+-}, и второй член в (95,11) оказывается совпадающим с членом «ухода» в том же интеграле столкновений.