СВЕРХПРОВОДНИКИ

§ 96. Высокочастотные свойства сверхпроводников. Общая формула

В IX, § 51, были получены формулы, связывающие ток в сверхпроводнике с векторным потенциалом электромагнитного поля в нем. Здесь эти формулы будут обобщены на случай переменного во времени поля. Как и в IX, мы будем исследовать этот вопрос в рамках модели БКШ, рассматривая электроны в металле как изотропный газ со слабым притяжением между частицами [1]).

Как всегда в металлах (и тем более — в сверхпроводниках), в уравнениях Максвелла можно пренебречь током смещения, т. е. писать

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \tag{96,1}$$

Отсюда следует, что в этом приближении

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{96,2}$$

Для описания поля выберем калибровку, в которой скалярный потенциал $\varphi = 0$. Линейную связь между компонентами фурье-разложений (по времени и по координатам) плотности тока и векторного потенциала поля напишем в виде

$$j_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = -Q(\omega, \mathbf{k}) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) A_\beta(\omega, \mathbf{k}), \tag{96,3}$$

тождественно удовлетворяющем уравнению (96,2), т. е. условию $\mathbf{kj}(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Продольная (вдоль $\mathbf{k}$) часть вектора $\mathbf{A}$ выпадает из соотношения (96,3), а потому и вообще из уравнений, так что ее можно положить равной нулю, т. е. считать, что $\mathbf{kA}(\omega, \mathbf{k}) = 0$. При таком выборе $\mathbf{A}$ связь между током и полем сводится к

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = -Q(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}). \tag{96,4}$$

---

[1]) Результаты этого и следующего параграфов принадлежат *Бардину* и *Маттису* (*J. Bardeen, D. C. Mattis*, 1958) и *А. А. Абрикосову, Л. П. Горькову* и *И. М. Халатникову* (1958).

Наша цель состоит в вычислении функции $Q(\omega, \mathbf{k})$. Эта величина относится к категории обобщенных восприимчивостей, и для решения задачи воспользуемся изложенным в § 91 методом.

Следуя этому методу, формальным образом вводим в гамильтониан сверхпроводника «векторный потенциал», зависящий от мацубаровской переменной τ (и от координат)[1]):

$$\mathbf{A}(\tau, \mathbf{r}) = \mathbf{A}(\zeta_s, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{kr} - \zeta_s \tau)}, \qquad \zeta_s = 2\pi s T. \tag{96,5}$$

С помощью уравнений Горькова вычисляем линейную по $\mathbf{A}$ поправку к мацубаровской гриновской функции:

$$\mathscr{G}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2) = \mathscr{G}^{(0)}(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \mathscr{G}^{(1)}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2); \tag{96,6}$$

в силу «однородности по τ» и пространственной однородности невозмущенного сверхпроводника, $\mathscr{G}^{(0)}$ зависит только от разностей своих аргументов. Плотность тока $\mathbf{j}(\tau, \mathbf{r})$ выражается через гриновскую функцию согласно

$$\mathbf{j}(\tau, \mathbf{r}) = -\frac{ie}{m}\left[(\nabla' - \nabla)\mathscr{G}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}')\right]_{\substack{\mathbf{r}'=\mathbf{r} \\ \tau'=\tau+0}} - \frac{e^2 N}{mc}\mathbf{A}(\tau, \mathbf{r}), \tag{96,7}$$

где N — плотность числа частиц[2]). С полем (96,5) это соотношение фактически будет иметь вид

$$\mathbf{j}(\tau, \mathbf{r}) = -Q_M(\zeta_s, \mathbf{k})\mathbf{A}(\tau, \mathbf{r}). \tag{96,8}$$

Коэффициент Q_M в нем есть мацубаровская восприимчивость, и согласно (91,18)

$$Q(i|\zeta_s|, \mathbf{k}) = Q_M(\zeta_s, \mathbf{k}). \tag{96,9}$$

Для определения искомой функции $Q(\omega, \mathbf{k})$ надо будет произвести аналитическое продолжение с точек $\omega = i|\zeta_s|$ на всю верхнюю полуплоскость.

Ход вычисления Q_M вполне аналогичен вычислениям в IX, § 51. Напомним, что в калибровке потенциалов с $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ поправка к щели Δ в энергетическом спектре отсутствует, а линеаризованные уравнения Горькова для гриновских функций $\mathscr{G}$ и $\mathscr{F}$ имеют вид[3])

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right]\mathscr{G}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}'; \tau', \mathbf{r}') + \Delta\overline{\mathscr{F}}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}') &= \\ = -\frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\tau, \mathbf{r})\nabla\mathscr{G}^{(0)}(\tau - \tau', \mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \left[\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right]\overline{\mathscr{F}}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}') - \Delta\mathscr{G}^{(1)}(\tau, \mathbf{r}; \tau, \mathbf{r}') &= \\ = \frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\tau, \mathbf{r})\nabla\overline{\mathscr{F}}^{(0)}(\tau - \tau', \mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \tag{96,10}$$

[1]) В этом параграфе полагаем $\hbar = 1$.

[2]) Ср. IX, (51,17). При сравнении с формулами в IX, § 51, надо помнить, что теперь e обозначает положительную величину — элементарный заряд.

[3]) Оператор Лапласа пишем как ∇^2, в отличие от щели Δ!

При поле вида (96,5) можно сразу отделить зависимость $\mathcal{G}^{(1)}$ и $\mathcal{F}^{(1)}$ от сумм $\tau+\tau'$ и $\mathbf{r}+\mathbf{r}'$, положив

$$\mathcal{G}^{(1)}=g(\tau-\tau', \mathbf{r}-\mathbf{r}')\exp\left[\frac{i}{2}\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')-\frac{i}{2}\zeta_s(\tau+\tau')\right] \quad (96,11)$$

и аналогично для $\mathcal{F}^{(1)}$ с функцией f вместо g. Так, после этой замены первое из уравнений (96,10) принимает вид

$$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{i}{2}\zeta_s\right)+\frac{1}{2m}\left(\nabla+\frac{i}{2}\mathbf{k}\right)^2+\mu\right]g+\Delta f=$$
$$=-\frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\zeta_s, \mathbf{k})\exp\left[\frac{i}{2}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\frac{i}{2}\zeta_s(\tau-\tau')\right]\nabla\mathcal{G}^{(0)}.$$

Разложим теперь все величины в ряды Фурье по $\tau-\tau'$ и интегралы — по $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$:

$$g(\tau, \mathbf{r})=T\sum_{s'=-\infty}^{\infty}\int g(\zeta'_{s'}, p)\exp[i\mathbf{pr}-i\zeta'_{s'}\tau]\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (96,12)$$

и т. д. В результате получим для фурье-компонент систему двух алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\left[i\left(\zeta'_{s'}+\frac{\zeta_s}{2}\right)-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2+\mu\right]g(\zeta'_{s'}, \mathbf{p})+\Delta f(\zeta'_{s'}, \mathbf{p})=\\&\qquad=\frac{e}{mc}\mathbf{pA}(\zeta_s, \mathbf{k})\mathcal{G}^{(0)}\left(\zeta'_{s'}-\frac{\zeta_s}{2}, \mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right),\\&\left[-i\left(\zeta'_{s'}+\frac{\zeta_s}{2}\right)-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2+\mu\right]f(\zeta'_{s'}, \mathbf{p})-\Delta f(\zeta'_{s'}, \mathbf{p})=\\&\qquad=-\frac{e}{mc}\mathbf{pA}(\zeta_s, \mathbf{k})\mathcal{F}^{(0)}\left(\zeta'_{s'}-\frac{\zeta_s}{2}, \mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right).\end{aligned}\right\} \quad (96,13)$$

«Невозмущенные» гриновские функции ферми-системы $\mathcal{G}^{(0)}$ и $\mathcal{F}^{(0)}$ разлагаются в ряды Фурье с «нечетными частотами»: $(2s'+1)\pi T$. Поэтому из (96,13) следует, что «частоты» $\zeta'_{s'}$ пробегают значения

$$\zeta'_{s'}=(2s'+1-s)\pi T.$$

Функции $\mathcal{G}^{(0)}$ и $\mathcal{F}^{(0)}$ даются выражениями (см. IX, (42,7—8))

$$\mathcal{G}^{(0)}(\zeta_s, \mathbf{p})=-\frac{i\zeta_s+\eta}{\zeta_s^2+\varepsilon^2}, \quad \mathcal{F}^{(0)}(\zeta_s, \mathbf{p})=\frac{\Delta}{\zeta_s^2+\varepsilon^2}, \quad (96,14)$$

где

$$\eta=\frac{p^2}{2m}-\mu\approx v_F(p-p_F), \quad \varepsilon^2=\Delta^2+\eta^2 \quad (96,15)$$

(постоянную Δ считаем вещественной). Используя эти формулы, легко привести решение системы (96,13) к виду

$$g(\zeta'_{s'},\ \mathbf{p}) = \frac{e}{mc}\,\mathbf{pA}(\zeta_s,\ \mathbf{p})\{\mathcal{G}^{(0)}(P_+)\,\mathcal{G}^{(0)}(P_-) + \overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_+)\,\overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_-)\}, \tag{96,16}$$

где

$$P_\pm = \left(\zeta'_{s'} \pm \frac{\zeta_s}{2},\ \mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{k}}{2}\right). \tag{96,17}$$

Используя (96,7), (96,11—12), получим для плотности тока:

$$\mathbf{j}(\zeta_s,\ \mathbf{k}) = -\frac{2eT}{m}\sum_{s'=-\infty}^{\infty}\int \mathbf{p}g(\zeta'_{s'},\ \mathbf{p})\frac{d^3p}{(2\pi)^3} - \frac{Ne^2}{mc}\mathbf{A}(\zeta_s,\ \mathbf{k})$$

с функцией g из (96,16). Учитывая поперечность векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{A}$ по отношению к $\mathbf{k}$, производим под знаком интеграла усреднение по направлениям вектора $\mathbf{p}_\perp$ в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$. Функции $\mathcal{G}^{(0)}$ и $\overline{\mathcal{F}}^{(0)}$ в (96,16) от направления $\mathbf{p}_\perp$ не зависят; усреднение же множителя $\mathbf{p}_\perp(\mathbf{p}_\perp\mathbf{A})$ превращает его в $\mathbf{A}p^2\sin^2\theta/2$, где θ—угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. В результате находим следующее окончательное выражение для мацубаровской восприимчивости:

$$Q_M(\zeta_s,\ \mathbf{k}) = \frac{Ne^2}{mc} + \frac{e^2T}{m^2c}\int\sum_{s'=-\infty}^{\infty} p^2\sin^2\theta \times$$
$$\times[\mathcal{G}^{(0)}(P_+)\,\mathcal{G}^{(0)}(P_-) + \overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_+)\,\overline{\mathcal{F}}^{(0)}(P_-)]\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{96,18}$$

Займемся теперь аналитическим продолжением этой функции с дискретного ряда точек $\zeta_s = 2s\pi T$ на всю правую полуплоскость комплексной переменной ζ (т. е. на верхнюю полуплоскость переменной $\omega = i\zeta$). Задача сводится к аналитическому продолжению подынтегрального выражения интеграла по d^3p; рассмотрим, например, первый член в нем:

$$J_M(\zeta_s) \equiv T\sum_{s'=-\infty}^{\infty}\mathcal{G}_+\left(\zeta'_{s'} + \frac{\zeta_s}{2}\right)\mathcal{G}_-\left(\zeta'_{s'} - \frac{\zeta_s}{2}\right) =$$
$$= T\sum_{s'=-\infty}^{\infty}\mathcal{G}_+((2s'+1)\pi T)\,\mathcal{G}_-((2s'+1)\pi T - \zeta_s) \tag{96,19}$$

(для краткости обозначений опускаем индекс (0), а аргументы $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2$ заменяем индексами $\pm$). Это выражение может быть представлено в виде интеграла

$$J_M(\zeta_s) = \frac{1}{4\pi i}\oint \mathcal{G}_+(z)\,\mathcal{G}_-(z - \zeta_s)\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{2T}\,dz, \tag{96,20}$$

взятого по трем замкнутым контурам C_1, C_2, C_3 (рис. 32), которые в общей сложности охватывают всю бесконечную совокупность полюсов множителя $\operatorname{tg}(z/2T)$, которые он имеет в точках $z=(2s'+1)\pi T$ (точки на рисунке); вычеты подынтегрального

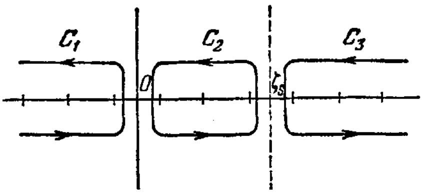

Рис. 32.

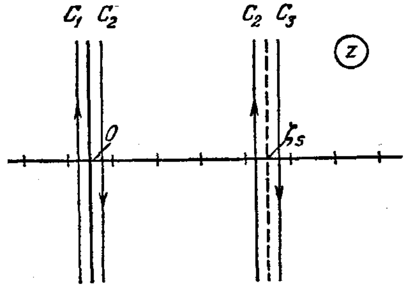

Рис. 33.

выражения в каждом из этих полюсов дают соответствующие члены в сумме (96,19) (на бесконечности $\mathcal{G}(z) \sim 1/z$, так что интеграл сходится). В выборе контуров учтено, что функция $\mathcal{G}(z)$ аналитична в каждой из двух полуплоскостей:

$$\mathcal{G}(z)=\begin{cases} G^R(iz), & \operatorname{Re} z>0, \\ G^A(iz), & \operatorname{Re} z<0, \end{cases}$$

где G^R и G^A—аналитические функции (запаздывающая и опережающая функции Грина—см. IX, § 37); мнимая же ось z является, вообще говоря, разрезом для функции $\mathcal{G}(z)$.

Развернем теперь контуры так, чтобы они проходили вертикально по обоим берегам линий разрезов $\operatorname{Im} z=0$ и $\operatorname{Im} z=\zeta_s$ (рис. 33; бесконечно удаленные замыкающие участки контуров не показаны). На паре линий C_1, C_2 заменяем переменную интегрирования, положив $z=i\omega'$, а на паре C_2, C_3 полагаем $z-\zeta_s=i\omega'$. Тогда при $\zeta_s>0$ имеем

$$J_M(\zeta_s)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\operatorname{tg}\frac{i\omega'}{2T}\left[G_+^R(\omega')-G_+^A(\omega')\right]G_-^A(\omega'-i\zeta_s)+\right.$$
$$\left.+\operatorname{tg}\frac{i\omega'+\zeta_s}{2T}\left[G_-^R(\omega')-G_-^A(\omega')\right]G_+^R(\omega'+i\zeta_s)\right\}d\omega'. \quad (96,21)$$

При выводе этого выражения значение ζ_s было еще фиксировано: $\zeta_s=2\pi sT$. Но для таких значений

$$\operatorname{tg}\frac{i\omega'+\zeta_s}{2T}=\operatorname{tg}\frac{i\omega'}{2T}=i\operatorname{th}\frac{\omega'}{2T}.$$

После такой замены аналитичность выражения (96,21) при всех $\zeta_s>0$ очевидна ввиду аналитичности функций G^A и G^R в соответствующих полуплоскостях. Полагая теперь $i\zeta_s=\omega$, имеем для уже аналитически продолженного выражения [1]):

$$J(\omega)\equiv J_M(-i\omega)=-\frac{i}{4\pi}\int \operatorname{th}\frac{\omega'}{2T}\{[G_+^R(\omega')-G_+^A(\omega')]\,G_-^A(\omega'-\omega)+ \\ +[G_-^R(\omega')-G_-^A(\omega')]\,G_+^R(\omega'+\omega)\}\,d\omega'. \quad (96,22)$$

Таким же способом производится продолжение второго члена в подынтегральном выражении в (96,18) и приводит к результату, отличающемуся от (96,22) лишь заменой функций G^R, G^A на F^{+R}, F^{+A} [2]). Все эти функции даются следующими выражениями (см. IX, § 41):

$$G^R(\omega,\ \mathbf{p})=\frac{u_p^2}{\omega-\varepsilon+i0}+\frac{v_p^2}{\omega+\varepsilon+i0},$$
$$F^{+R}(\omega,\ \mathbf{p})=\frac{\Delta}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{\omega+\varepsilon+i0}-\frac{1}{\omega-\varepsilon+i0}\right], \quad (96,23)$$

где

$$\left.\begin{matrix} u_p^2 \\ v_p^2 \end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{\eta}{\varepsilon}\right).$$

Функции же G^A, F^{+A} отличаются от G^R, F^{+R} лишь знаком перед $i0$. Поэтому

$$G^R-G^A=2\operatorname{Im}G^R=-\pi\left[u_p^2\delta(\omega-\varepsilon)+v_p^2\delta(\omega+\varepsilon)\right],$$
$$F^{+R}-F^{+A}=\frac{\pi\Delta}{2\varepsilon}\left[\delta(\omega-\varepsilon)-\delta(\omega+\varepsilon)\right]$$

и интегрирование в (96,22) сводится к устранению δ-функций.

После ряда простых, но довольно громоздких алгебраических преобразований получается следующее окончательное выражение [3]):

$$Q(\omega,\ \mathbf{k})=\frac{Ne^2}{mc}-\frac{e^2}{4m^2c}\int p^2\sin^2\theta\operatorname{th}\frac{\varepsilon_+}{2T}\times \\ \times\left\{\left[1+\frac{\eta_+\eta_-+\Delta^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-}\right]\left[\frac{1}{\varepsilon_+-\varepsilon_--\omega-i0}+\frac{1}{\varepsilon_+-\varepsilon_-+\omega+i0}\right]+ \right. \\ \left.+\left[1-\frac{\eta_+\eta_-+\Delta^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-}\right]\left[\frac{1}{\varepsilon_++\varepsilon_--\omega-i0}+\frac{1}{\varepsilon_++\varepsilon_-+\omega+i0}\right]\right\}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (96,24)$$

---

[1]) Изложенный способ аналитического продолжения принадлежит *Г. М. Элиашбергу* (1962).

[2]) Определение гриновской функции F^+ (соответствующей температурной функции $\mathcal{F}$) — см. IX, § 41. Определения функций F^{+R} и F^{+A} отличаются от F^+ заменой T-произведения коммутатором — аналогично связи между G^R, G^A и G.

[3]) В IX, § 51, указывалось на необходимость осторожности при вычислении суммы и интегралов вида (96,18) ввиду медленности убывания подынтегрального выражения. В использованном здесь порядке операций эта трудность обойдена. Это подтверждается тем, что окончательное выражение (96,24) удовлетворяет необходимому условию: $Q=0$ при $\Delta=0$ и $\omega=0$ (нормальный металл в постоянном поле) — см. примечание на стр. 496.

где

$$\eta_{\pm}=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}\pm\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2-\mu,\quad \varepsilon_{\pm}^2=\Delta^2+\eta_{\pm}^2. \tag{96,25}$$

Два члена в фигурных скобках в (96,24) имеют существенно различное происхождение и смысл. Первый из них нечетен по $\mathbf{p}$; поэтому при $T=0$ (когда множитель $\operatorname{th}(\varepsilon_+/2T)=1$) интеграл от этого члена обращается в нуль. Эта часть Q связана с бесстолкновительной динамикой элементарных возбуждений. Ее мнимая часть, существующая при всех ω и $\mathbf{k}$, связана с бесстолкновительным затуханием Ландау.

Интеграл же от второго члена остается отличным от нуля и при $T=0$. Эта часть Q связана с рождением или разрывом куперовских пар. Полюсы подынтегрального выражения в этой части лежат при $\varepsilon_+ + \varepsilon_- = \pm\omega$. Для их существования (а тем самым и для возникновения диссипации—мнимой части Q) частота должна превышать 2Δ—энергию связи куперовской пары.

§ 97. Высокочастотные свойства сверхпроводников. Предельные случаи

Перейдем к исследованию общей формулы (96,24). Число предельных случаев здесь очень велико ввиду наличия четырех независимых параметров $\hbar\omega, \hbar k v_F$, Δ, T, которые могут находиться в различных соотношениях между собой. Мы рассмотрим лишь несколько из них.

При $\hbar\omega \gg \Delta$ наличие щели в спектре сверхпроводника несущественно. Положив в первом приближении $\Delta=0$, мы пришли бы к формуле для поперечной диэлектрической проницаемости нормального электронного ферми-газа; мы не станем останавливаться на соответствующих вычислениях[1]).

Лондоновский случай

Рассмотрим лондоновский предельный случай, в котором

$$\hbar k v_F \ll \Delta_0, \tag{97,1}$$

где Δ_0—значение $\Delta(T)$ при $T=0$. При этом будем считать, что $\Delta \ll T$, чем исключается область очень низких температур. Частоту будем считать малой в том смысле, что $\omega \ll k v_F$.

---

[1]) Связь между $Q(\omega, \mathbf{k})$ и поперечной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_t(\omega, \mathbf{k})$ выясняется следующим образом. Выразив плотность тока через вектор поляризации согласно $-i\omega\mathbf{P}=\mathbf{j}$ и введя вместо $\mathbf{A}$ напряженность электрического поля $\mathbf{E}=i\omega\mathbf{A}/c$, переписываем соотношение (96,4) в виде $\mathbf{P}=-c\omega^{-2}Q\mathbf{E}$. Отсюда видно, что

$$-cQ/\omega^2=(\varepsilon_t-1)/4\pi.$$