где

$$\eta_{\pm}=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}\pm\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2-\mu,\quad \varepsilon_{\pm}^2=\Delta^2+\eta_{\pm}^2. \tag{96,25}$$

Два члена в фигурных скобках в (96,24) имеют существенно различное происхождение и смысл. Первый из них нечетен по $\mathbf{p}$; поэтому при $T=0$ (когда множитель $\operatorname{th}(\varepsilon_+/2T)=1$) интеграл от этого члена обращается в нуль. Эта часть Q связана с бесстолкновительной динамикой элементарных возбуждений. Ее мнимая часть, существующая при всех ω и $\mathbf{k}$, связана с бесстолкновительным затуханием Ландау.

Интеграл же от второго члена остается отличным от нуля и при $T=0$. Эта часть Q связана с рождением или разрывом куперовских пар. Полюсы подынтегрального выражения в этой части лежат при $\varepsilon_+ +\varepsilon_- =\pm\omega$. Для их существования (а тем самым и для возникновения диссипации—мнимой части Q) частота должна превышать 2Δ—энергию связи куперовской пары.

§ 97. Высокочастотные свойства сверхпроводников. Предельные случаи

Перейдем к исследованию общей формулы (96,24). Число предельных случаев здесь очень велико ввиду наличия четырех независимых параметров $\hbar\omega$, $\hbar k v_F$, Δ, T, которые могут находиться в различных соотношениях между собой. Мы рассмотрим лишь несколько из них.

При $\hbar\omega\gg\Delta$ наличие щели в спектре сверхпроводника несущественно. Положив в первом приближении $\Delta=0$, мы пришли бы к формуле для поперечной диэлектрической проницаемости нормального электронного ферми-газа; мы не станем останавливаться на соответствующих вычислениях[1]).

Лондоновский случай

Рассмотрим лондоновский предельный случай, в котором

$$\hbar k v_F\ll\Delta_0, \tag{97,1}$$

где Δ_0—значение $\Delta(T)$ при $T=0$. При этом будем считать, что $\Delta\ll T$, чем исключается область очень низких температур. Частоту будем считать малой в том смысле, что $\omega\ll k v_F$.

---

[1]) Связь между $Q(\omega, \mathbf{k})$ и поперечной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_t(\omega, \mathbf{k})$ выясняется следующим образом. Выразив плотность тока через вектор поляризации согласно $-i\omega\mathbf{P}=\mathbf{j}$ и введя вместо $\mathbf{A}$ напряженность электрического поля $\mathbf{E}=i\omega\mathbf{A}/c$, переписываем соотношение (96,4) в виде $\mathbf{P}=-c\omega^{-2}Q\mathbf{E}$. Отсюда видно, что

$$-cQ/\omega^2=(\varepsilon_t-1)/4\pi.$$

При $k \to 0$

$$1 - \frac{\eta_+\eta_- + \Delta^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-} \sim k^2.$$

Поэтому второй член в фигурных скобках в (96,24) мал и им можно пренебречь. В первом же члене первая квадратная скобка заменяется на 2; воспользовавшись нечетностью второй квадратной скобки как функции $\mathbf{p}$, пишем после этого:

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{Ne^2}{mc} - \frac{e^2}{2m^2c}\int\left[\operatorname{th}\frac{\varepsilon_+}{2T} - \operatorname{th}\frac{\varepsilon_-}{2T}\right]\frac{p^2\sin^2\theta}{\varepsilon_+ - \varepsilon_- - \hbar\omega - i0}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Заметив, что $\operatorname{th}(\varepsilon/2T) = 1 - 2n_0(\varepsilon)$, где

$$n_0(\varepsilon) = [e^{\varepsilon/T} + 1]^{-1} \tag{97,2}$$

— функция распределения элементарных возбуждений в сверхпроводящем ферми-газе (распределение Ферми с равным нулю химическим потенциалом), пишем

$$\operatorname{th}\frac{\varepsilon_+}{2T} - \operatorname{th}\frac{\varepsilon_-}{2T} = -2[n_0(\varepsilon_+) - n_0(\varepsilon_-)] \approx -2\hbar\mathbf{kv}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon},$$

где

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} = \frac{\eta\mathbf{p}}{m\varepsilon}.$$

Тогда

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{Ne^2}{mc} + \frac{e^2}{m^2c}\int\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{\mathbf{kv}p^2\sin^2\theta}{\mathbf{kv} - \omega - i0}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{97,3}$$

При $\omega = 0$ это выражение совпадает, как и следовало, с лондоновским значением N_se^2/mc, где $N_s(T)$ — плотность сверхпроводящих электронов[1]). Поэтому можно переписать (97,3) в эквивалентном виде:

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{N_se^2}{mc} + \frac{\omega e^2}{m^2c}\int\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{p^2\sin^2\theta}{\mathbf{kv} - \omega - i0}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{97,4}$$

Второй член в этом выражении описывает вклад в диэлектрическую проницаемость от элементарных возбуждений в ферми-газе[2]).

---

[1]) В этом легко убедиться с помощью формул, приведенных в IX, § 40, при вычислении $\rho_s = mN_s$. Отметим, что $Q(0, \mathbf{k})$ обращается в нуль (вместе с N_s) при $T \to T_c$, как это уже было упомянуто в примечании на стр. 494.

[2]) В этом можно убедиться, сравнив (97,4) с формулой (2) для поперечной проницаемости бесстолкновительной электронной плазмы в задаче 2 к § 31. При сравнении следует учесть, что лондоновский случай соответствует квазиклассическому пределу, так что формула для вырожденного газа отличается от формулы для максвелловской плазмы только видом функции распределения и законом дисперсии $\varepsilon(p)$.

При $\omega \ll kv$ можно пренебречь ω в знаменателе подынтегрального выражения в (97,4):

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{N_s e^2}{mc} + \frac{\omega e^2}{4\pi^2 c\hbar^3 k} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin^2\theta d\cos\theta}{\cos\theta - i0} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{p^4}{m^2 v} dp. \qquad (97,5)$$

Интеграл по $\cos\theta$ вычисляется по вычету в полюсе $\cos\theta = i0$ и равен $i\pi$. Интеграл же по p, переписанный в виде

$$\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{p^2 \varepsilon}{\cdot\, \eta} d\eta,$$

логарифмически расходится при $|\eta| \ll \Delta$. Обрезав его при значениях $|\eta| \sim \omega\Delta/kv_F$ (для которых $kv \sim \omega$), получим, с логарифмической точностью,

$$\left.\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=\Delta} p_F^2 \Delta \cdot 2 \int\limits_{\omega\Delta/kv_F}^{\Delta} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Таким образом,

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{N_s e^2}{mc} - i \frac{e^2 p_F^2 \Delta\omega \ln(kv_F/\omega)}{2\pi c\hbar^3 Tk\,(e^{\Delta/T}+1)(e^{-\Delta/T}+1)}. \qquad (97,6)$$

Мнимая часть Q определяет диссипацию; ее отрицательный знак отвечает положительному знаку мнимой части диэлектрической проницаемости.

Выражение (97,6) становится непригодным при $T \to T_c$, когда N_s и Δ стремятся к нулю. Главный вклад в интеграл по p в (97,5) здесь вносит область $\eta \sim T \gg \Delta$; в ней можно положить $\Delta = 0$. После этого получим

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = -i \frac{3\pi}{4} \frac{Ne^2}{mc} \frac{\omega}{kv_F},$$

где $N = p_F^3/3\pi^2\hbar^3$ — плотность электронов. Это выражение отвечает просто аномальному скин-эффекту в нормальном металле (с законом дисперсии $\varepsilon = p^2/2m$) [1]).

Пиппардовский случай

В статическом магнитном поле пиппардовский предельный случай соответствует неравенству

$$\hbar k v_F \gg \Delta_0 \sim T_c; \qquad (97,7)$$

[1]) См. формулу (86,16). При сравнении следует учесть независимость K от φ в данном случае, а также тот факт, что Q связывает $\mathbf{j}$ с $\mathbf{A}$, а не с $\mathbf{E}$, как σ из (86,16).

Рассматривая переменное электромагнитное поле, добавим сюда еще и условие

$$kv_F \gg \omega. \tag{97,8}$$

Вычисления в этом случае существенно упрощаются, если предварительно вычесть из выражения $Q(\omega, \mathbf{k})$ (96,24) его статическое значение $Q(0, \mathbf{k})$; это сводится к отбрасыванию постоянного члена Ne^2/mc и вычитанию из каждого члена $(\varepsilon_+ \pm \varepsilon_- \pm \pm \hbar\omega)^{-1}$ в подынтегральном выражении такого же члена с $\omega = 0$. Разность $Q(\omega, \mathbf{k}) - Q(0, \mathbf{k})$ оказывается пропорциональной $1/k$. Таким же образом зависит от k пиппардовское $Q(0, \mathbf{k})$:

$$Q(0, \mathbf{k}) = \frac{c\beta}{4\pi k}, \quad \beta = \frac{4\pi Ne^2}{mc^2} \frac{3\pi^2}{4\hbar v_F} \Delta \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \tag{97,9}$$

(см. IX, (51,21)). Поэтому можно записать $Q(\omega, \mathbf{k})$ в виде

$$Q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{c}{4\pi k}[\beta + \gamma(\omega)], \tag{97,10}$$

где $\gamma(\omega)$ — подлежащая вычислению функция, обращающаяся при $\omega = 0$ в нуль. Отметим, что ввиду той же зависимости от k остается справедливой формула IX, (52,6) для глубины проникновения δ, в которой надо лишь заменить β на $\beta + \gamma(\omega)$. Но ввиду комплексности $\gamma(\omega)$ (см. ниже) при этом естественно пользоваться не самой δ, а связанной с ней величиной — поверхностным импедансом $\zeta(\omega) = -i\omega\delta/c$.

В интеграле, определяющем разность $Q(\omega, \mathbf{k}) - Q(0, \mathbf{k})$, существенны (как и при вычислении $Q(0, \mathbf{k})$ в IX, § 51) малые значения $\cos\theta$, причем интеграл быстро сходится при увеличении $\cos\theta$; это позволяет положить $\sin\theta = 1$ и распространить интегрирование по $\cos\theta$ от $-\infty$ до ∞.

Преобразуем интеграл по

$$d^3p = 2\pi p^2\, dp\, d\cos\theta \approx 2\pi p_F^2 m\, d\eta\, d\cos\theta$$

$(\eta = p^2/2m - \mu)$ к интегрированию по новым переменным

$$x_1 = \varepsilon_+/\Delta, \quad x_2 = \varepsilon_-/\Delta.$$

Имеем

$$\eta_+ + \eta_- \approx 2\eta, \quad \eta_+ - \eta_- \approx \hbar k v_F \cos\theta.$$

Поэтому интегрирование по $d\eta\, d\cos\theta$ можно заменить интегрированием по $d\eta_+\, d\eta_-/kv_F$ в пределах от $-\infty$ до ∞ по каждой из переменных η_+ и η_-. При этом выпадут все члены в подынтегральном выражении, содержащие произведение $\eta_+\eta_-$ и потому нечетные по этим переменным. После этого можно перейти к интегрированию по переменным x_1 и x_2 в пределах от 1 до ∞ по каждой из них, заменив

$$d\eta\, d\cos\theta \to 4\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{\hbar k v_F \eta_+\eta_-}d\varepsilon_+\, d\varepsilon_- = \frac{4\Delta^2 x_1 x_2\, dx_1 dx_2}{\hbar k v_F\left[(x_1^2-1)(x_2^2-1)\right]^{1/2}}.$$

В результате этих преобразований найдем

$$\gamma(\omega) = -3\pi\frac{Ne^2}{mc^2}\frac{\Delta}{\hbar v_F}J,$$

$$J = \int_1^\infty\int_1^\infty \frac{dx_1 dx_2}{\left[(x_1^2-1)(x_2^2-1)\right]^{1/2}}\,\mathrm{th}\frac{x_1\Delta}{2T}\times$$
$$\times\left\{(x_1x_2+1)\left[\frac{1}{x_1-x_2-\tilde\omega-i0}+\frac{1}{x_1-x_2+\tilde\omega+i0}-\mathrm{P}\frac{2}{x_1-x_2}\right]+\right.$$
$$\left.+(x_1x_2-1)\left[\frac{1}{x_1+x_2-\tilde\omega-i0}+\frac{1}{x_1+x_2+\tilde\omega+i0}-\frac{2}{x_1+x_2}\right]\right\}, \quad (97,11)$$

где $\tilde\omega = \hbar\omega/\Delta$. Ограничимся рассмотрением мнимой части этого выражения, определяющей поглощение энергии поля.

Мнимая часть подынтегральных выражений в (97,11) отделяется по правилу (29,8), после чего δ-функции устраняются интегрированием по одной из переменных, x_1 или x_2; при этом надо следить за тем, чтобы точка обращения в нуль аргумента δ-функции действительно находилась в области интегрирования. После простых преобразований получим при $\omega > 0$:

$$J'' \equiv \mathrm{Im}\, J = \pi\int_1^\infty \frac{x(x+\tilde\omega)+1}{(x^2-1)^{1/2}\left[(x+\tilde\omega)^2-1\right]^{1/2}}\left[\mathrm{th}\frac{(x+\tilde\omega)\Delta}{2T}-\mathrm{th}\frac{x\Delta}{2T}\right]dx+$$
$$+\pi\int_1^{\tilde\omega-1}\frac{x(\tilde\omega-x)-1}{(x^2-1)^{1/2}\left[(x-\tilde\omega)^2-1\right]^{1/2}}\,\mathrm{th}\frac{x\Delta}{2T}dx; \quad (97,12)$$

второй член существует лишь при $\tilde\omega > 2$. Аналогичным образом легко убедиться, что $J''(-\tilde\omega) = J''(\tilde\omega)$. Интеграл (97,12) зависит от двух параметров, Δ/T и ω/Δ, которые могут еще находиться в различных соотношениях друг с другом и с единицей. Рассмотрим некоторые из возможных здесь предельных случаев.

Пусть $T = 0$. Тогда первый интеграл в (97,12) обращается в нуль. Второй же интеграл отличен от нуля при $\omega > 2\Delta_0$, т. е. имеется порог поглощения на «энергии связи» куперовских пар. Наличие этого порога, в чем непосредственно проявляется щель в спектре, есть специфическое свойство сверхпроводника.

Вблизи порога, при $\tilde{\omega}-2 \ll 1$, во всей области интегрирования x близко к 1. Полагая $\tilde{\omega}-2=\delta$, $x-1=z\delta$, находим

$$J'' \approx \frac{\pi\delta}{2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = \frac{\pi^2\delta}{2} = \pi^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{2}-1\right).$$

Собрав написанные выше формулы, находим таким образом следующее выражение для мнимой части Q при $T=0$ вблизи порога поглощения:

$$Q'' = -\frac{3\pi^2 Ne^2}{4mc} \frac{\Delta_0}{\hbar v_F k} \left(\frac{\hbar\omega}{2\Delta_0}-1\right). \tag{97,13}$$

При отличной от нуля температуре рассмотрим случай малых частот, $\omega \ll \Delta$, причем будем считать, что $\Delta(T) \sim T$ (исключая тем самым температуры как вблизи нуля, так и вблизи T_c). Теперь второй интеграл в (97,12) отсутствует. В первом же интеграле существенна область $x-1 \sim \tilde{\omega} \ll 1$. Разложив в подынтегральном выражении разность двух th по степеням $\tilde{\omega}$ и введя переменную $x-1=u$, находим, с логарифмической точностью,

$$J'' \approx \frac{\pi\hbar\omega}{2T} \operatorname{ch}^{-2}\frac{\Delta}{2T} \int_0^{\sim 1} \frac{du}{\sqrt{u(u+\tilde{\omega})}} = \frac{\pi\hbar\omega}{2T} \operatorname{ch}^{-2}\frac{\Delta}{2T} \ln\frac{\Delta}{\omega}.$$

В результате получим

$$Q'' = -\frac{3\pi}{8} \frac{Ne^2}{mc} \frac{\omega}{v_F k} \frac{\Delta}{T} \operatorname{ch}^{-2}\frac{\Delta}{2T} \ln\frac{\Delta}{\omega}. \tag{97,14}$$

§ 98. Теплопроводность сверхпроводника

Физическая природа электронной теплопроводности сверхпроводника аналогична природе теплопроводности или вязкости сверхтекучей бозе-жидкости. В обоих случаях речь идет о кинетических коэффициентах нормальной компоненты квантовой жидкости — совокупности элементарных возбуждений в ней. Рассмотрим здесь этот вопрос в рамках той же модели БКШ (*Б. Т. Гейликман*, 1958).

Исходим из кинетического уравнения для функции распределения квазичастиц в сверхпроводнике, в котором существует градиент температуры:

$$\mathbf{v}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = \operatorname{St} n, \tag{98,1}$$