Вблизи порога, при $\tilde{\omega}-2\ll 1$, во всей области интегрирования x близко к 1. Полагая $\tilde{\omega}-2=\delta$, $x-1=z\delta$, находим

$$J''\approx\frac{\pi\delta}{2}\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}=\frac{\pi^2\delta}{2}=\pi^2\left(\frac{\tilde{\omega}}{2}-1\right).$$

Собрав написанные выше формулы, находим таким образом следующее выражение для мнимой части Q при $T=0$ вблизи порога поглощения:

$$Q''=-\frac{3\pi^2Ne^2}{4mc}\frac{\Delta_0}{\hbar v_Fk}\left(\frac{\hbar\omega}{2\Delta_0}-1\right). \tag{97,13}$$

При отличной от нуля температуре рассмотрим случай малых частот, $\omega\ll\Delta$, причем будем считать, что $\Delta(T)\sim T$ (исключая тем самым температуры как вблизи нуля, так и вблизи T_c). Теперь второй интеграл в (97,12) отсутствует. В первом же интеграле существенна область $x-1\sim\tilde{\omega}\ll 1$. Разложив в подынтегральном выражении разность двух th по степеням $\tilde{\omega}$ и введя переменную $x-1=u$, находим, с логарифмической точностью,

$$J''\approx\frac{\pi\hbar\omega}{2T}\operatorname{ch}^{-2}\frac{\Delta}{2T}\int\limits_0^{\sim 1}\frac{du}{\sqrt{u(u+\tilde{\omega})}}=\frac{\pi\hbar\omega}{2T}\operatorname{ch}^{-2}\frac{\Delta}{2T}\ln\frac{\Delta}{\omega}.$$

В результате получим

$$Q''=-\frac{3\pi}{8}\frac{Ne^2}{mc}\frac{\omega}{v_Fk}\frac{\Delta}{T}\operatorname{ch}^{-2}\frac{\Delta}{2T}\ln\frac{\Delta}{\omega}. \tag{97,14}$$

§ 98. Теплопроводность сверхпроводника

Физическая природа электронной теплопроводности сверхпроводника аналогична природе теплопроводности или вязкости сверхтекучей бозе-жидкости. В обоих случаях речь идет о кинетических коэффициентах нормальной компоненты квантовой жидкости — совокупности элементарных возбуждений в ней. Рассмотрим здесь этот вопрос в рамках той же модели БКШ (*Б. Т. Гейликман*, 1958).

Исходим из кинетического уравнения для функции распределения квазичастиц в сверхпроводнике, в котором существует градиент температуры:

$$\mathbf{v}\frac{\partial n}{\partial\mathbf{r}}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial n}{\partial\mathbf{p}}=\operatorname{St}n, \tag{98,1}$$

где $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ — скорость квазичастиц. Энергия квазичастицы

$$\varepsilon = [v_F^2 (p - p_F)^2 + \Delta^2 (T)]^{1/2} \tag{98,2}$$

и сама зависит от температуры через посредство энергетической щели $\Delta(T)$. Поэтому при наличии градиента температуры энергия ε тоже становится функцией координат и производная $-\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}$ играет роль действующей на квазичастицу силы; с этим связано появление второго члена в левой стороне уравнения (98,1).

Как обычно, полагаем $n = n_0(\varepsilon) + \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, где

$$n_0(\varepsilon) = (e^{\varepsilon/T} + 1)^{-1} \tag{98,3}$$

— равновесная функция распределения. Сохранив в левой стороне уравнения лишь члены с n_0, имеем для нее:

$$\mathbf{v}\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{p}} = \left[\frac{\partial n_0}{\partial T} - \frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right]\mathbf{v}\,\nabla T.$$

В стоящей в квадратных скобках разности члены с производной от Δ сокращаются и, таким образом, остается

$$-\frac{\varepsilon}{T}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\mathbf{v}\,\nabla T = \frac{\mathbf{v}\,\nabla T}{T^2}\frac{\varepsilon}{(e^{\varepsilon/T}+1)(e^{-\varepsilon/T}+1)}.$$

Интеграл столкновений зависит от механизма рассеяния квазичастиц. Мы рассмотрим случай, когда основным таким механизмом является упругое рассеяние на неподвижных атомах примесей; закон рассеяния будем считать изотропным. Тогда интеграл столкновений сводится к выражению (ср. (11,3))

$$\operatorname{St} n = -\nu\delta n,$$

где $\nu = vN_{\text{пр}}\sigma_t$ — эффективная частота столкновений, $N_{\text{пр}}$ — плотность числа примесных атомов, σ_t — транспортное сечение рассеяния квазичастицы на атоме примеси. Последнее есть постоянная величина порядка атомных размеров.

Таким образом, кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\mathbf{v}\,\nabla T}{v}\frac{\varepsilon}{T}\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon} = \frac{\delta n}{l}, \tag{98,4}$$

где $l = 1/N_{\text{пр}}\sigma_t$ — постоянная длина пробега.

Тепловой поток вычисляется как интеграл

$$\mathbf{q} = \int \varepsilon\mathbf{v}\,\delta n\,\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tag{98,5}$$

(множитель 2 — от двух направлений спина квазичастицы). Но с функцией распределения $n = n_0 + \delta n$ связан также и нормальный электрический ток в сверхпроводнике с плотностью

$$\mathbf{j}_n = -e\int \mathbf{v}\,\delta n\,\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Между тем коэффициент теплопроводности определяется по тепловому потоку при условии $\mathbf{j}=0$. В данном случае, однако, это условие не приводит к необходимости внесения каких-либо изменений в уравнение (98,4). Дело в том, что полная плотность тока в сверхпроводнике есть сумма $\mathbf{j}=\mathbf{j}_n+\mathbf{j}_s$ нормального и сверхпроводящего токов. Возникающий при наличии градиента температуры ток $\mathbf{j}_n$ автоматически компенсируется (при разомкнутой электрической цепи) сверхпроводящим током $\mathbf{j}_s=-\mathbf{j}_n$. При этом существенно, что движение сверхпроводящих электронов не связано с переносом тепла. Равновесная функция распределения квазичастиц «на фоне» сверхтекучего движения со скоростью $\mathbf{v}_s=-\mathbf{j}_s/eN_s$ отличается от (98,3) заменой ε на $\varepsilon+\mathbf{p}\mathbf{v}_s$ (ср. § 77); эта замена должна была бы быть произведена и в кинетическом уравнении (98,1). Но величина $\mathbf{v}_s$ пропорциональна $\mathbf{j}$ и тем самым—малому градиенту ∇T; поэтому указанная замена привела бы к появлению в левой части кинетического уравнения дополнительных членов лишь второго порядка малости, которые все равно должны были бы быть опущены при переходе к (98,4).

Подставив δn из (98,4) в (98,5), получим, после усреднения по направлениям $\mathbf{p}$, для коэффициента теплопроводности выражение

$$\varkappa=-\frac{l}{3T}\int v\varepsilon^2\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{2\cdot 4\pi p^2\,dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

или, заменив $v\,dp=d\varepsilon$, $p^2\approx p_F^2$,

$$\varkappa=-\frac{lp_F^2}{3\pi^2\hbar^3T}\cdot 2\int\limits_{\Delta}^{\infty}\varepsilon^2\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}d\varepsilon. \tag{98,6}$$

Окончательно, после очевидных подстановок,

$$\varkappa=\frac{2lp_F^2\Delta^3}{3\pi^2\hbar^3T^2}\int\limits_1^{\infty}\frac{u^2du}{(e^{u\Delta/T}+1)(e^{-u\Delta/T}+1)}. \tag{98,7}$$

При $T\to 0$, $\Delta\to\Delta_0$ коэффициент теплопроводности стремится к нулю по закону

$$\varkappa=\frac{2lp_F^2\Delta^2}{3\pi^2\hbar^3T}e^{-\Delta/T}. \tag{98,8}$$

При $T\to T_c$, $\Delta\to 0$ он стремится (как это видно из (98,6)) к значению

$$\varkappa=\frac{4lp_F^2T}{3\pi^2\hbar^3}\int\limits_0^{\infty}\varepsilon n_0(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{lp_F^2T}{9\hbar^3},$$

отвечающему нормальному металлу.