Но τ должно оставаться при $T \to T_c$ (и $k \neq 0$) конечным. Отсюда следует, что должно быть

$$y = z\nu. \tag{102,5}$$

Таким образом, предположение о масштабной инвариантности позволяет связать друг с другом оба индекса в (102,1—2).

Как и в статическом случае, есть все основания полагать, что критические индексы одинаковы по обе стороны точки перехода. Дело в том, что пространственная неоднородность ($k \neq 0$) размывает фазовый переход в том смысле, что устраняет особенности всех величин при $T = T_c$ (в этом отношении неоднородность влияет на фазовый переход так же, как внешнее поле). Другими словами, точка $T = T_c$ теряет свою выделенность, так что нет никаких причин для различия значений индекса z при стремлении T к T_c сверху или снизу. В силу соотношения (102,5), то же самое относится тогда и к индексу y.

Аналогичным образом можно связать с z и другие критические индексы. Рассмотрим, например, зависимость восприимчивости χ от ω при $k = 0$ в точке $T = T_c$.

В соответствии с масштабной инвариантностью, функция $\chi(\omega, k; T_c)$ может быть представлена в виде

$$\chi = |T - T_c|^{-\gamma} f(\omega\tau_0, kr_c), \qquad f(0, 0) = \text{const},$$

где γ — критический индекс для восприимчивости при $k = 0$ и $\omega = 0$. При $k = 0$ и $T \to T_c$ восприимчивость должна стремиться к конечному (при $\omega \neq 0$) пределу. Учитывая, что $\tau_0 \sim |T - T_c|^{-z\nu}$, найдем, что для этого должно быть

$$f(\xi, 0) \sim \xi^{-\gamma/\nu z} \quad \text{при} \quad \xi \to \infty.$$

Тем самым определится искомая зависимость χ от ω:

$$\chi \sim \omega^{-\gamma/\nu z} \quad \text{при} \quad k = 0,\ T = T_c. \tag{102,6}$$

Таким образом, в рассмотренном случае требования масштабной инвариантности позволяют установить определенную связь между кинетическими и термодинамическими критическими индексами, но недостаточны для полного определения первых по последним.

§ 103. Релаксация в жидком гелии вблизи λ-точки

Рассмотрим теперь системы с «вырождением», в которых параметр порядка имеет несколько (n) компонент η_i, но эффективный гамильтониан зависит (в однородной системе) только от суммы их квадратов. Другими словами, если рассматривать совокупность величин η_i как n-мерный вектор, то эффективный гамильтониан не зависит от его направления.

Характерным примером является чисто обменный ферромагнетик, энергия которого не зависит от направления вектора намагниченности. Другой пример представляет собой сверхтекучая жидкость (жидкий гелий), в которой роль параметра порядка играет конденсатная волновая функция

$$\Xi = \sqrt{n_0}\, e^{i\Phi} \tag{103,1}$$

(см. IX, §§ 26, 27). Эта комплексная величина представляет собой совокупность двух независимых величин, но энергия однородной жидкости зависит только от квадрата модуля $|\Xi|^2 = n_0$ — плотности конденсата.

Специфические свойства «вырожденных» систем обусловлены существованием в их колебательном спектре ветви (*мягкой моды*), связанной именно с колебаниями направления «вектора параметра порядка»; частота этих колебаний обращается в нуль в точке фазового перехода. Закон их дисперсии можно, с одной стороны, найти из макроскопических уравнений движения, а с другой — он должен удовлетворять требованиям масштабной инвариантности. Это позволяет, как мы увидим ниже, полностью выразить кинетические критические индексы через термодинамические. Сделаем это на примере жидкого гелия (*R. A. Ferrell, N. Meynyhard, H. Schmidt, F. Shwabl, P. Szépfalusy*, 1967).

В этом случае «мягкой модой» является второй звук. Вблизи точки перехода он представляет собой совместные колебания сверхтекучей скорости $\mathbf{v}_s$ и энтропии; амплитуда колебаний нормальной скорости во втором звуке $v_n \sim v_s\rho_s/\rho_n$ и вблизи точки фазового перехода (λ-точки) мала вместе с ρ_s. Напомним, что сверхтекучая скорость связана с фазой конденсатной функции волновой функции ($\mathbf{v}_s = \hbar\nabla\Phi/m$), так что колебания $\mathbf{v}_s$ означают колебания фазы или, другими словами, направления «вектора параметра порядка». Закон дисперсии этих колебаний:

$$\omega = u_2 k, \tag{103,2}$$

где

$$u_2 = \sqrt{\frac{TS^2\rho_s}{C_p\rho_n}} \approx \sqrt{\frac{T_\lambda S_\lambda^2\rho_s}{C_p\rho}} \tag{103,3}$$

— скорость второго звука (S — энтропия, C_p — теплоемкость единицы массы жидкости); вблизи λ-точки можно заменить T и S их значениями T_λ и S_λ в самой этой точке, а плотность ρ_n нормальной компоненты жидкости — ее полной плотностью ρ [1]).

---

[1]) Напомним (см. VI, § 130), что скорости первого и второго звука в жидком гелии вычисляются как корни дисперсионного уравнения

$$u^4 - u^2\left[\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S + \frac{\rho_s TS^2}{\rho_n C_v}\right] + \frac{\rho_s TS^2}{\rho_n C_p}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S = 0.$$

При $T \to T_\lambda$ плотность ρ_s стремится к нулю по закону

$$\rho_s \propto (T_\lambda - T)^{(2-\alpha)/3}, \tag{103,4}$$

где α—критический индекс теплоемкости:

$$C_p \propto |T_\lambda - T|^{-\alpha} \tag{103,5}$$

(см. IX, (28,3)). Закон же стремления к нулю скорости u_2 зависит от знака индекса α. Если $\alpha > 0$, так что $C_p \to \infty$, то

$$u_2 \propto (T_\lambda - T)^{(1+\alpha)/3}, \qquad \alpha > 0.$$

Если же $\alpha < 0$, то C_p стремится к конечному пределу (напомним, что критический индекс определяет поведение лишь особой части теплоемкости вблизи точки перехода!); тогда

$$u_2 \propto (T_\lambda - T)^{(2-\alpha)/6}, \qquad \alpha < 0. \tag{103,6}$$

Ниже будем считать, что $\alpha < 0$ (как это, по-видимому, фактически имеет место для жидкого гелия: $\alpha \approx -0{,}02$).

Затухание второго звука описывается мнимой частью частоты. Вдали от λ-точки, ниже ее, она мала, но возрастает по мере приближения к λ-точке, и в непосредственной ее окрестности, при $kr_c \sim 1$, затухание становится порядка единицы (т. е. $\operatorname{Im}\omega \sim |\omega|$). Выше же λ-точки, на достаточном удалении от нее, мы получим обычную затухающую тепловую волну (решение уравнения теплопроводности) с законом дисперсии

$$\omega = i\frac{\varkappa}{\rho C_p}k^2, \tag{103,7}$$

где $\varkappa$—коэффициент теплопроводности.

Применим теперь гипотезу масштабной инвариантности, согласно которой вблизи λ-точки закон дисперсии должен иметь вид

$$\omega = k^z f(kr_c)$$

Иначе можно записать эту зависимость как[1])

$$\omega = k^z f\left(\frac{T - T_\lambda}{k^{1/\nu}}\right) \tag{103,8}$$

(с другой функцией f), где ν—критический индекс корреляционного радиуса.

Вне непосредственной близости к λ-точке мал коэффициент теплового расширения, а вместе с ним мала и разность $C_p - C_v$, так что можно положить $C_p \approx C_v$. При $T \to T_\lambda$ C_p заметно отличается от C_v. При этом, однако, стремится к нулю ρ_s и с учетом этой малости получается (103,3).

[1]) Эти соотношения должны быть верны во флуктуационной области, что во всяком случае требует выполнения неравенства $|T - T_\lambda| \ll T_\lambda$. Существуют, однако, указания на то, что фактически в жидком гелии это неравенство должно выполняться с большим запасом, что означало бы наличие в теории некоторого малого числового параметра.

Справедливость законов дисперсии (103,2) и (103,7) не ограничена каким-либо условием удаленности от λ-точки, но при заданной температуре ограничена условием $kr_c \ll 1$ — длина волны должна быть велика по сравнению с корреляционным радиусом; в противном случае теряют применимость макроскопические уравнения, на которых эти законы основаны.

Рассмотрим сначала область температур ниже точки перехода. Требование, чтобы при $kr_c \ll 1$ закон дисперсии был линеен по k, определяет предельное выражение функции $f(\xi)$ в (103,8):

$$f(\xi) \sim (-\xi)^{\nu(z-1)} \quad \text{при } \xi \to -\infty.$$

Тем самым определяется и зависимость закона дисперсии от температуры:

$$\omega \sim k(T_\lambda - T)^{\nu(z-1)}. \qquad (103,9)$$

Сравнив этот результат с (103,6), находим

$$\nu(z-1) = \frac{2-\alpha}{6}.$$

Критические индексы ν и α связаны друг с другом соотношением $3\nu = 2 - \alpha$ (см. V, (149,2)); отсюда[1])

$$z = 3/2. \qquad (103,10)$$

При $T \to T_\lambda$ частота должна стремиться к конечному пределу; для этого должно быть $f(0) = \text{const}$. Таким образом, закон дисперсии второго звука в самой λ-точке:

$$\omega \sim k^z. \qquad (103,11)$$

При этом мнимая часть ω того же порядка величины, что и вещественная. При $T \neq T_\lambda$ закон дисперсии (103,11) справедлив для коротких волн, удовлетворяющих условию $kr_c \gg 1$.

Наконец, рассмотрим область температур $T > T_\lambda$. Здесь при $kr_c \ll 1$ зависимость ω от k должна быть квадратичной. Для этого должно быть

$$f(\xi) \sim \xi^{\nu(z-2)} \quad \text{при } \xi \to +\infty.$$

Тогда

$$\omega \sim k^2 (T - T_\lambda)^{\nu(z-2)}.$$

Сравнив с (103,7) и выразив ν через α, найдем температурную зависимость коэффициента теплопроводности в виде

$$\varkappa \sim (T - T_\lambda)^{-(2-\alpha)/6}. \qquad (103,12)$$

[1]) При $\alpha < 0$ получилось бы $z = 3/(2-\alpha)$.

Он стремится к бесконечности при $T \to T_\lambda$ по закону, близкому к $(T - T_\lambda)^{-1/3}$.

Во втором звуке мы имеем дело с колебаниями фазы Φ конденсатной волновой функции. Поэтому величина $1/\operatorname{Im}\omega$ имеет также смысл времени релаксации фазы. При $k \to 0$ она, естественно, обращается в бесконечность — в однородной жидкости изменение фазы не связано с изменением энергии и потому фаза не может релаксировать.

Время релаксации абсолютной величины $|\Xi| = \sqrt{n_0}$ — плотности конденсата — не совпадает, вообще говоря, со временем релаксации фазы. Но по смыслу масштабной инвариантности можно утверждать, что оба времени сравниваются по порядку величины при $kr_c \sim 1$. Согласно (103,9) имеем для этого времени

$$\tau \sim \frac{1}{\omega(1/r_c)} \propto r_c (T_\lambda - T)^{-\nu(z-1)} \propto (T_\lambda - T)^{-\nu z}.$$

Со значением z из (103,10) находим

$$\tau \propto (T_\lambda - T)^{-1+\alpha/2}. \tag{103,13}$$

Время релаксации плотности конденсата остается конечным и при $k \to 0$, отнюдь не обращаясь в бесконечность, как для фазы. Поэтому закон температурной зависимости (103,13) для релаксации плотности конденсата остается в силе и при $k = 0$ (*В. Л. Покровский*, *И. М. Халатников*, 1969)[1]).

---

[1]) При $\alpha > 0$ получилось бы $\tau \propto (T_\lambda - T)^{-1}$ в точном совпадении с законом (101,6), полученном в рамках теории Ландау. Это совпадение, однако, в известном смысле случайно.