Доказательство. Первое утверждение следует из второго, так как если G имеет центр Z и мы по индукции имеем абелеву башню для G/Z, то мы можем поднять эту абелеву башню до G, показав тем самым, что G разрешима. Чтобы доказать второе утверждение, воспользуемся формулой классов

$$(G:1) = \operatorname{card}(Z) + \sum (G : G_x);$$

здесь сумма берется лишь по тем x, для которых $(G : G_x) \neq 1$. Очевидно, p делит $(G:1)$, а также делит каждый член в сумме, так что порядок центра делится на p, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть G — p-группа, порядок которой отличен от 1. Тогда существует последовательность подгрупп*

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n = G,$$

такая, что каждая подгруппа G_i нормальна в G и G_{i+1}/G_i — циклическая группа порядка p.

Доказательство. Так как центр группы G нетривиален, то в нем имеется элемент $a \neq e$ порядка p. Пусть H — циклическая группа, порожденная a. По индукции, если $G \neq H$, то в факторгруппе G/H мы можем найти последовательность подгрупп, удовлетворяющую сформулированным требованиям. Взяв прообраз этой башни в G, получим искомую последовательность.

§ 7. Категории и функторы

Теперь, прежде чем идти дальше, нам будет удобно ввести новую терминологию. Мы уже встречались с объектами разного рода: множествами, моноидами, группами. Со многими другими мы еще встретимся, а для каждого такого рода объектов мы определяем специальный род отображений между ними (например, гомоморфизмы). Некоторые формальные свойства являются общими для всех них, а именно существование тождественных отображений объектов на себя и ассоциативность отображений, выполняемых одно за другим. Мы введем понятие категории, чтобы дать общее абстрактное описание таких ситуаций.

Категория $\mathcal{A}$ включает в себя следующее: класс объектов $\operatorname{Ob}(\mathcal{A})$; для всяких двух объектов $A, B \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ множество $\operatorname{Mor}(A, B)$, называемое множеством *морфизмов* объекта A в B; для всяких трех объектов $A, B, C \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ закон композиции (т. е. отображение)

$$\operatorname{Mor}(B, C) \times \operatorname{Mor}(A, B) \to \operatorname{Mor}(A, C).$$

При этом должны выполняться аксиомы:

КАТ 1. Два множества $\mathrm{Mor}(A, B)$ и $\mathrm{Mor}(A', B')$ не пересекаются, за исключением случая $A = A'$ и $B = B'$; в этом случае они равны.

КАТ 2. Для каждого объекта A из $\mathcal{A}$ имеется морфизм $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$, который для всех объектов $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ действует тождественно слева и справа на элементы множеств $\mathrm{Mor}(B, A)$ и $\mathrm{Mor}(A, B)$ соответственно.

КАТ 3. Закон композиции ассоциативен (в случае, когда он определен), т. е. если $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$ и $h \in \mathrm{Mor}(C, D)$, то

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

для любых объектов A, B, C, D из $\mathcal{A}$.

Здесь мы сознательно записываем композицию элемента g из $\mathrm{Mor}(B, C)$ и элемента f из $\mathrm{Mor}(A, B)$ как $g \circ f$, т. е. как композицию отображений. Далее, в этой книге мы увидим, что на практике морфизмы в большинстве случаев действительно являются отображениями или тесно связаны с отображениями.

Класс всех морфизмов категории $\mathcal{A}$ будет обозначаться символом $\mathrm{Ar}(\mathcal{A})$ (от „arrows of $\mathcal{A}$" — „стрелки из $\mathcal{A}$"). Мы будем иногда использовать запись „$f \in \mathrm{Ar}(\mathcal{A})$", чтобы выразить, что f — какой-то морфизм из $\mathcal{A}$, т. е. элемент некоторого множества $\mathrm{Mor}(A, B)$, где $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.

Иногда, неточно выражаясь, мы будем называть категорией сам класс объектов — в том случае, когда ясно, что понимается под морфизмами этой категории.

Элемент $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ записывается также в виде $f\colon A \to B$ или

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Морфизм f называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $g : B \to A$, такой, что $g \circ f$ и $f \circ g$ являются тождественными морфизмами в $\mathrm{Mor}(A, A)$ и $\mathrm{Mor}(B, B)$ соответственно. Если $A = B$, то изоморфизм мы называем также *автоморфизмом*.

Морфизмы объекта A в себя называются *эндоморфизмами*. Множество эндоморфизмов объекта A обозначается символом $\mathrm{End}(A)$. Из наших аксиом немедленно вытекает, что $\mathrm{End}(A)$ — моноид.

Пусть A — объект категории $\mathcal{A}$. Мы обозначаем через $\mathrm{Aut}(A)$ множество его автоморфизмов. Это множество в действительности является группой, поскольку все наши определения так и подобраны, чтобы выполнялись групповые аксиомы (ассоциативность, существование единичного элемента и обратного). Таким образом, мы теперь начинаем улавливать некую обратную связь между абстрактными и более конкретными категориями.

Примеры. Пусть $\mathscr{S}$ — категория, объектами которой служат множества, а морфизмами — отображения множеств. Мы говорим просто, что $\mathscr{S}$ — категория множеств. Три аксиомы КАТ 1, 2, 3 тривиальным образом удовлетворяются.

Пусть Grp — категория групп, т. е. категория, объектами которой служат группы, а морфизмами — гомоморфизмы групп. Снова все три аксиомы тривиально выполняются. Аналогично имеем категорию моноидов, обозначаемую символом Mon.

Ясно также, что G-множества для всякой группы G образуют категорию (с очевидными морфизмами).

Вообще мы можем теперь определить понятие действия группы G на объекте в любой категории. Действительно, пусть $\mathscr{A}$ — некоторая категория и $A \in Ob(\mathscr{A})$. Под *действием* G на A мы будем понимать гомоморфизм G в группу $\mathrm{Aut}(A)$. Обычно объект A является множеством и автоморфизм из $\mathrm{Aut}(A)$ действует на A как на множестве, т. е. индуцирует перестановку на A. Таким образом, если нам задан гомоморфизм

$$\sigma\colon\ G \to \mathrm{Aut}(A),$$

то для каждого $x \in G$ мы имеем автоморфизм σ_x объекта A, являющийся перестановкой на A.

Рассмотрим специальный случай, когда $\mathscr{A}$ — категория абелевых групп, которую можно обозначить символом Ab. Пусть A — абелева группа, G — группа, и пусть задано действие G на группе A, т. е. гомоморфизм

$$\sigma\colon\ G \to \mathrm{Aut}(A).$$

Будем обозначать через $x \cdot a$ элемент $\sigma_x(a)$. Тогда для всех $x,\ y \in G$, $a,\ b \in A$ имеем

$$x \cdot (y \cdot a) = (xy) \cdot a,\quad x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b,$$
$$e \cdot a = a,\quad x \cdot 0 = 0.$$

Заметим, что когда группа G действует на себе посредством сопряжений, то G действует на себе не только как на множестве, но и как на объекте в категории групп, т. е. перестановки, индуцированные этим действием, в действительности являются автоморфизмами групп.

Аналогично мы введем позднее другие категории (колец, модулей, полей), и у нас уже есть общее определение того, что следует понимать под действием группы на объекте в любой из этих категорий.

Пусть $\mathscr{A}$ — категория. Мы можем взять в качестве объектов новой категории $\mathscr{C}$ морфизмы из $\mathscr{A}$. Если $f\colon A \to B$ и $f'\colon A' \to B'$ — два морфизма из $\mathscr{A}$ (и, следовательно, объекты из $\mathscr{C}$), то мы

определяем морфизм $f \to f'$ (в $\mathscr{C}$) как пару морфизмов (φ, ψ) из $\mathscr{A}$, для которых следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

Ясно, что $\mathscr{C}$ — категория (строго говоря, как и в случае отображений множеств, следовало бы снабжать (φ, ψ) индексами f и f', но на практике такая индексация опускается).

Имеется много вариаций на эту тему. Так, мы можем сосредоточить свое внимание на тех морфизмах из $\mathscr{A}$, у которых фиксирован исходный объект, или на тех, у которых фиксирован конечный объект.

Пусть, например, A — некоторый объект в $\mathscr{A}$, и пусть $\mathscr{A}_A$ — категория, объектами которой служат морфизмы

$$f\colon X \to A$$

из $\mathscr{A}$, для которых A — конечный объект. Морфизм в $\mathscr{A}_A$ из $f: X \to A$ в $g\colon Y \to A$ — это просто такой морфизм

$$h\colon X \to Y$$

из $\mathscr{A}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — категории. *Ковариантный функтор* F из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$ — это правило, сопоставляющее каждому объекту A в $\mathscr{A}$ некоторый объект $F(A)$ в $\mathscr{B}$ и каждому морфизму $f\colon A \to B$ — морфизм $F(f)\colon F(A) \to F(B)$ таким образом, что выполняются следующие условия:

ФУН 1. Для всякого A из $\mathscr{A}$ имеем $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$.

ФУН 2. Если $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ — два морфизма из $\mathscr{A}$, то $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Пример. Сопоставив каждой группе G ее множество (сняв с него групповую структуру) и каждому групповому гомоморфизму сам этот гомоморфизм, рассматриваемый лишь с теоретико-множественной точки зрения, мы получим функтор из категории групп в категорию множеств. Такой функтор называется *стирающим* функтором.

Заметим, что всякий функтор преобразует изоморфизмы в изоморфизмы, так как $f \circ g = \mathrm{id}$ влечет $F(f) \circ F(g) = \mathrm{id}$.

Можно определить понятие *контравариантного функтора* из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, используя то же самое условие ФУН 1 и обращая стрелки в условии ФУН 2, т. е. каждому морфизму $f\colon A \to B$ контравариантный функтор сопоставляет морфизм

$$F(f)\colon F(B) \to F(A)$$

(идущий в противоположном направлении) таким образом, что если

$$f\colon A \to B \text{ и } g\colon B \to C$$

— морфизмы в $\mathcal{A}$, то

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Иногда для обозначения функтора пишут f_* вместо $F(f)$ в случае ковариантного функтора и f^* — в случае контравариантного функтора.

Пример. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая категория и A — фиксированный объект в $\mathcal{A}$. Мы получим ковариантный функтор

$$M_A\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S},$$

положив $M_A(X) = \mathrm{Mor}(A, X)$ для любого объекта X из $\mathcal{A}$.

Если $\varphi\colon X \to X'$ — морфизм, то возьмем в качестве

$$M_A(\varphi)\colon \mathrm{Mor}(A, X) \to \mathrm{Mor}(A, X')$$

отображение, задаваемое правилом

$$g \mapsto \varphi \circ g$$

для любого $g \in \mathrm{Mor}(A, X)$,

$$A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{\varphi} X'.$$

Аксиомы ФУН 1 и ФУН 2 проверяются тривиально.

Аналогично для каждого объекта B из $\mathcal{A}$ мы имеем контравариантный функтор

$$M^B\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S},$$

такой, что $M^B(Y) = \mathrm{Mor}(Y, B)$. Если $\psi\colon Y' \to Y$ — морфизм, то

$$M^B(\psi)\colon \mathrm{Mor}(Y, B) \to \mathrm{Mor}(Y', B)$$

есть отображение, задаваемое правилом

$$f \mapsto f \circ \psi$$

для любого $f \in \mathrm{Mor}(Y, B)$,

$$Y' \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{f} B.$$

Предыдущие два функтора называются *представляющими функторами*.

Рассмотрим важный специальный случай, когда мы имеем дело с категорией групп. Если S — множество и G — группа, то, как мы отмечали в § 2, множество отображений $M(S, G)$ само есть группа. Если G, G' — две группы, то множество морфизмов $\mathrm{Mor}(G, G')$ в категории групп — это просто множество гомоморфизмов G в G'; оно будет обозначаться $\mathrm{Hom}(G, G')$. Заметим, что $\mathrm{Hom}(G, G')$ не будет, вообще говоря, группой, если G' — неабелева группа.

Отметим, кроме того, тот важный факт, что представляющие функторы приводят к гомоморфизмам. Рассмотрим, например, ковариантный представляющий функтор. Пусть S — множество, X, X' — группы и φ: $X \to X'$ — гомоморфизм групп. Имеем индуцированное отображение

$$M_S(\varphi)\colon\ M(S, X) \to M(S, X'),$$

задаваемое правилом $g \mapsto \varphi \circ g$. Если g, $h \in M(S, X)$, то для $x \in X$

$$\varphi \circ (gh)(x) = \varphi((gh)(x)) = \varphi(g(x)\,h(x)) = \varphi(g(x))\,\varphi(h(x)).$$

Следовательно, $M_S(\varphi)$ — гомоморфизм. Аналогичное утверждение справедливо и для контравариантного представляющего функтора.

Тот факт, что $\mathrm{Hom}(G, X)$ есть группа, когда обе группы G, X коммутативны, заслуживает особого внимания. Мы изучим коммутативный случай более детально, когда будем иметь дело с дуальными группами, и позднее, когда будем рассматривать двойственность векторных пространств. Эти разделы дают хорошие дополнительные примеры для обсуждаемых здесь понятий, и читатель может сразу обратиться к ним, если пожелает.

Как отметил Гротендик, представляющие функторы можно использовать, чтобы перенести определения некоторых структур на множествах в произвольные категории. Например, пусть $\mathcal{A}$ — категория и G — объект из $\mathcal{A}$. Мы говорим, что G — *групповой объект* в $\mathcal{A}$, если для каждого объекта X из $\mathcal{A}$ задана групповая структура на множестве $\mathrm{Mor}(X, G)$ таким образом, что сопоставление

$$X \mapsto \mathrm{Mor}(X, G)$$

функториально (т. е. является функтором из категории $\mathcal{A}$ в категорию групп). Множество $\mathrm{Mor}(X, G)$ иногда обозначают через $G(X)$ и мыслят его как множество точек объекта G в X. За оправданием этой терминологии читатель отсылается к гл. X, § 3.

Другим примером может служить понятие произведения, определенное в категории множеств. Мы распространим это понятие на произвольные категории так, чтобы оно было согласовано с представляющими функторами.

Произведения и копроизведения

Пусть $\mathcal{A}$ — категория и A, B — объекты из $\mathcal{A}$. Под (*прямым*) *произведением* объектов A, B в $\mathcal{A}$ понимается тройка (P, f, g), состоящая из объекта P в $\mathcal{A}$ и двух морфизмов

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

и удовлетворяющая следующему условию. Если даны два морфизма в $\mathcal{A}$

$$\varphi \quad C \to A \quad \text{и} \quad \psi\colon C \to B,$$

то существует единственный морфизм $h\colon C \to P$, для которого следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, "\varphi"'] \arrow[ddr, "\psi"] & \\ & P \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

другими словами, $\varphi = f \circ h$ и $\psi = g \circ h$. Более общо, если дано семейство объектов $\{A_\iota\}_{\iota \in I}$ в $\mathcal{A}$, то (*прямое*) *произведение* этого семейства есть пара $(P, \{f_\iota\}_{\iota \in I})$, где P — объект в $\mathcal{A}$ и $\{f_\iota\}_{\iota \in I}$ — семейство морфизмов

$$f_\iota\colon P \to A_\iota,$$

удовлетворяющая следующему условию Для каждого семейства морфизмов

$$g_\iota\colon C \to A_\iota$$

существует единственный морфизм h. $C \to P$, такой, что $f_\iota \circ h = g_\iota$ для всех ι.

Пример. Пусть $\mathcal{A}$ — категория множеств. Пусть, далее, $\{A_\iota\}_{\iota \in I}$ — некоторое семейство множеств, $P = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ — их декартово произведение и $f_\iota\colon P \to A_\iota$ — проекция на ι-множитель. Тогда $(P, \{f_\iota\})$ очевидным образом удовлетворяет требованиям, налагаемым на произведение в категории множеств.

Что касается обозначений, то произведение двух объектов в категории мы будем обычно записывать в виде $A \times B$, а произведение произвольного семейства объектов — в виде $\prod_{\iota \in I} A_\iota$, т. е. используя

те же самые обозначения, что и в категории множеств. В следующем параграфе мы исследуем произведения в категории групп.

Нам придется также встречаться с дуальным понятием. Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — семейство объектов в категории $\mathcal{A}$. Под их *копроизведением* понимается пара $(S, \{f_i\}_{i\in I})$, состоящая из объекта S и семейства морфизмов

$$\{f_i\colon A_i \to S\},$$

удовлетворяющая следующему условию. Для каждого семейства морфизмов $\{g_i\colon A_i \to C\}$ существует единственный морфизм $h\colon S \to C$, такой, что $h \circ f_i = g_i$ для всех i.

Как в случае произведения, так и в случае копроизведения, морфизм h называется морфизмом, *индуцированным* семейством $\{g_i\}$.

Примеры. Пусть $\mathcal{S}$ — категория множеств. *В этой категории существуют копроизведения.* Например, пусть S, S' — множества, и пусть T — множество, имеющее ту же мощность, что и S', и не пересекающееся с S. Пусть $f_1\colon S \to S$ — тождественное отображение и $f_2\colon S' \to T$ — некоторая биекция. Пусть U — объединение S и T. Тогда (U, f_1, f_2) есть копроизведение для S, S', причем f_1, f_2 рассматриваются как отображения в U.

Пусть $\mathcal{S}_0$ — категория пунктированных множеств. Ее объекты состоят из пар (S, x), где S — множество, а x — некоторый его элемент. Морфизм из (S, x) в (S', x') в этой категории — это такое отображение $g\colon S \to S'$, что $g(x) = x'$. *Копроизведение для* (S, x) *и* (S', x') *в этой категории существует* и может быть построено следующим образом. Обозначим через T объединение x и множества той же мощности, что и дополнение к x' в S', такого, что $T \cap S = \{x\}$. Пусть $U = S \cup T$ и

$$f_1\colon (S, x) \to (U, x)$$

— отображение, индуцированное тождественным отображением множества S. Пусть, далее,

$$f_2\colon (S', x') \to (U, x)$$

— отображение, переводящее x' в x и индуцирующее некоторую биекцию $S' - \{x'\}$ на $T - \{x\}$. Тогда тройка

$$((U, x), f_1, f_2)$$

есть копроизведение для (S, x) и (S', x') в категории пунктированных множеств.

Аналогичными конструкциями могут быть получены копроизведения произвольных семейств множеств или пунктированных множеств. Категория пунктированных множеств особенно важна в теории гомотопий.

Пусть $\mathscr{C}$ — некоторая категория. Объект P в $\mathscr{C}$ называется *универсально притягивающим*, если существует единственный морфизм каждого объекта из $\mathscr{C}$ в P, и называется *универсально отталкивающим*, если для каждого объекта из $\mathscr{C}$ существует единственный морфизм P в этот объект.

Когда смысл ясен из контекста, мы будем называть такой объект P просто *универсальным*. Так как универсальный объект обладает тождественным морфизмом в себя, то ясно, что если P, P' — два универсальных объекта в $\mathscr{C}$, то между ними существует однозначно определенный изоморфизм.

Посмотрим теперь, как это применяется, скажем, к копроизведению. Пусть $\mathscr{A}$ — категория и $\{A_i\}$ — семейство объектов в $\mathscr{A}$. Определим новую категорию $\mathscr{C}$, взяв в качестве ее объектов семейства морфизмов $\{f_i\colon A_i \to B\}_{i\in I}$. Если даны два таких семейства

$$\{f_i\colon A_i \to B\} \quad \text{и} \quad \{f'_i\colon A_i \to B'\},$$

то морфизмом первого объекта во второй будет по определению морфизм $\varphi\colon B \to B'$ в $\mathscr{A}$, такой, что $\varphi \circ f_i = f'_i$ для всех i. Тогда копроизведение семейства $\{A_i\}$ — это просто универсальный объект в $\mathscr{C}$.

Копроизведение семейства $\{A_i\}$ будет обозначаться так:

$$\coprod_{i\in I} A_i.$$

Копроизведение двух объектов A, B будет также обозначаться через

$$A \coprod B.$$

Из предположения единственности вытекает, что копроизведение определено однозначно (с точностью до однозначно определенного изоморфизма). Аналогичное замечание справедливо и для прямого произведения.

§ 8. Свободные группы

Пусть I — некоторое множество, и для каждого $i \in I$ пусть G_i — некоторая группа Пусть $G = \prod G_i$ — теоретико-множественное произведение множеств G_i. Тогда G — это множество всех семейств $(x_i)_{i\in I}$, где $x_i \in G_i$. Мы можем определить на G групповую структуру посредством покомпонентного умножения; именно, если $(x_i)_{i\in I}$ и $(y_i)_{i\in I}$ — два элемента из G, то их произведением считаем семейство $(x_i y_i)_{i\in I}$. Обратным к $(x_i)_{i\in I}$ будет $(x_i^{-1})_{i\in I}$. Ясно, что при этом G — группа и что проекции

$$f_i\colon G \to G_i$$