

Пусть \mathcal{C} — некоторая категория. Объект P в \mathcal{C} называется *универсально притягивающим*, если существует единственный морфизм каждого объекта из \mathcal{C} в P , и называется *универсально отталкивающим*, если для каждого объекта из \mathcal{C} существует единственный морфизм P в этот объект.

Когда смысл ясен из контекста, мы будем называть такой объект P просто *универсальным*. Так как универсальный объект обладает тождественным морфизмом в себя, то ясно, что если P, P' — два универсальных объекта в \mathcal{C} , то между ними существует однозначно определенный изоморфизм.

Посмотрим теперь, как это применяется, скажем, к копроизведению. Пусть \mathcal{A} — категория и $\{A_i\}$ — семейство объектов в \mathcal{A} . Определим новую категорию \mathcal{C} , взяв в качестве ее объектов семейства морфизмов $\{f_i: A_i \rightarrow B\}_{i \in I}$. Если даны два таких семейства

$$\{f_i: A_i \rightarrow B\} \quad \text{и} \quad \{f'_i: A_i \rightarrow B'\},$$

то морфизмом первого объекта во второй будет по определению морфизм $\varphi: B \rightarrow B'$ в \mathcal{A} , такой, что $\varphi \circ f_i = f'_i$ для всех i . Тогда копроизведение семейства $\{A_i\}$ — это просто универсальный объект в \mathcal{C} .

Копроизведение семейства $\{A_i\}$ будет обозначаться так:

$$\coprod_{i \in I} A_i.$$

Копроизведение двух объектов A, B будет также обозначаться через

$$A \amalg B.$$

Из предположения единственности вытекает, что копроизведение определено однозначно (с точностью до однозначно определенного изоморфизма). Аналогичное замечание справедливо и для прямого произведения.

§ 8. Свободные группы

Пусть I — некоторое множество, и для каждого $i \in I$ пусть G_i — некоторая группа. Пусть $G = \coprod G_i$ — теоретико-множественное произведение множеств G_i . Тогда G — это множество всех семейств $(x_i)_{i \in I}$, где $x_i \in G_i$. Мы можем определить на G групповую структуру посредством покомпонентного умножения; именно, если $(x_i)_{i \in I}$ и $(y_i)_{i \in I}$ — два элемента из G , то их произведением считаем семейство $(x_i y_i)_{i \in I}$. Обратным к $(x_i)_{i \in I}$ будет $(x_i^{-1})_{i \in I}$. Ясно, что при этом G — группа и что проекции

$$f_i: G \rightarrow G_i$$

являются гомоморфизмами. Поскольку G — теоретико-множественное произведение для G_i , то получаем

Предложение 5. *Группа $\prod G_i$ вместе с гомоморфизмами проектирования образует произведение семейства $\{G_i\}_{i \in I}$ в категории групп.*

Действительно, если $\{g_i: G' \rightarrow G_i\}_{i \in I}$ — семейство гомоморфизмов, то существует единственный гомоморфизм $g: G' \rightarrow \prod G_i$, для которого коммутативна требуемая диаграмма. Это — гомоморфизм, определяемый равенством $g(x')_i = g_i(x')$ для $x' \in G'$ и всякого $i \in I$.

Заметим, что каждая группа G_j допускает инъективный гомоморфизм в произведение на его j -ю компоненту, а именно отображение $\lambda_j: G_j \rightarrow \prod_i G_i$, такое, что i -я компонента элемента $\lambda_j(x)$ для всякого $x \in G_j$ равна единичному элементу группы G_i , если $i \neq j$, и равна самому x , если $i = j$. Это вложение будет называться *каноническим*.

Имеется полезный критерий того, что группа есть прямое произведение своих подгрупп.

Предложение 6. *Пусть G — группа и H, K — две такие ее подгруппы, что $H \cap K = e$, $HK = G$ и $xu = ux$ для всех $x \in H$ и $y \in K$. Тогда отображение*

$$H \times K \rightarrow G,$$

при котором $(x, y) \mapsto xy$, есть изоморфизм.

Доказательство. Это отображение, очевидно, гомоморфизм, и притом сюръективный, так как $HK = G$. Если (x, y) принадлежит его ядру, то $x = y^{-1}$, так что x лежит сразу и в H , и в K , а потому $x = e$, следовательно, также $y = e$ и наше отображение — изоморфизм.

Заметим, что предложение 6 обобщается по индукции на любое конечное число подгрупп H_1, \dots, H_n , попарно коммутирующих друг с другом и таких, что $H_1 \dots H_n = G$ и

$$H_{i+1} \cap (H_1 \dots H_i) = e.$$

В этом случае группа G изоморфна прямому произведению

$$H_1 \times \dots \times H_n.$$

Пусть G — группа и S — подмножество в G . Напомним, что G порождается множеством S , если каждый элемент из G может быть записан в виде конечного произведения элементов из S и их обратных (причем пустое произведение всегда представляет единичный элемент G). Элементы из S называются тогда *образующими*. Если в группе G существует конечное множество образующих, то мы на-

зывается ее *конечно порожденной*. Пусть S — некоторое множество. Мы говорим, что отображение $\varphi: S \rightarrow G$ порождает G , если его образ порождает G .

Пусть $f: S \rightarrow F$ — отображение множества S в некоторую группу, $g: S \rightarrow G$ — другое такое отображение. Если $f(S)$ (или, как мы условились говорить, f) порождает F , то, очевидно, существует самое большее один гомоморфизм ψ группы F в G , для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow g & \swarrow \psi \\ & & G \end{array}$$

Рассмотрим теперь категорию \mathcal{C} , объектами которой являются отображения множества S в группы. Если $f: S \rightarrow G$ и $f': S \rightarrow G'$ — два объекта в этой категории, то под морфизмом из f в f' мы понимаем гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow G'$, для которого $\varphi \circ f = f'$, т. е. для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow f & \downarrow \varphi \\ S & & G \\ & \searrow f' & \downarrow \varphi \end{array}$$

Под *свободной группой*, определенной множеством S , мы будем понимать универсальный объект в этой категории.

Предложение 7. *Для всякого множества S существует определенная им свободная группа (F, f) . При этом отображение f инъективно и порождает группу F .*

Доказательство (я обязан этим доказательством Ж. Титсу). Ради простоты мы сначала проведем доказательство для случая, когда S конечно. Пусть T — бесконечное счетное множество, Γ — множество всех групповых структур на T и T_γ — соответствующая группа для каждого $\gamma \in \Gamma$. Обозначим через M_γ множество всех отображений множества S в T_γ . Пусть $T_{\gamma, \varphi}$ — теоретико-множественное произведение группы T_γ и множества $\{\varphi\}$, состоящего из одного элемента; таким образом, φ используется как индекс, так что $T_{\gamma, \varphi}$ — это „та же самая“ группа, что и T_γ , но занумерованная посредством φ . Введем декартово произведение

$$F_0 = \prod_{\gamma \in \Gamma} \prod_{\varphi \in M_\gamma} T_{\gamma, \varphi}$$

групп $T_{\gamma, \varphi}$. Определим отображение

$$f_0: S \rightarrow F_0,$$

переводя S в множитель $T_{\gamma, \varphi}$ посредством φ . Мы утверждаем, что для каждого отображения $g: S \rightarrow G$ множества S в произвольную группу G существует гомоморфизм $g_*: F_0 \rightarrow G$, такой, что коммутативна обычная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & F_0 & \\ f_0 \nearrow & & \downarrow g_* \\ S & & G \\ & g \searrow & \end{array}$$

т. е. $g_* \circ f_0 = g$. Для доказательства заметим сначала, что можно предполагать, что g порождает G , просто ограничившись рассмотрением подгруппы в G , порожденной образом g . В этом случае $\text{card } G \leq \text{card } T$. Пусть \bar{G} — произведение группы G и группы целых чисел \mathbf{Z} , так что $\text{card } (\bar{G}) = \text{card } (T)$. Тогда для некоторого $\gamma \in \Gamma$ существует изоморфизм

$$\lambda: \bar{G} \rightarrow T_\gamma$$

и G естественным образом вкладывается в $\bar{G} = G \times \mathbf{Z}$ как прямой сомножитель. Обозначим это вложение через h , так что $h(G) = G \times \{0\}$. Мы имеем теперь следующую последовательность гомоморфизмов и отображений:

$$S \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} \bar{G} = G \times \mathbf{Z} \xrightarrow{\lambda} T_\gamma.$$

Пусть $\psi = \lambda \circ h \circ g$ — их композиция. Тогда $\psi \in M_\gamma$, и мы можем рассматривать ψ как отображение множества S в $T_{\gamma, \psi}$. Положим $\psi_* = \text{pr}_G \circ \lambda^{-1} \circ \text{pr}_{T_{\gamma, \psi}}$, где $\text{pr}_{T_{\gamma, \psi}}$ — проекция группы F_0 на множитель $T_{\gamma, \psi}$. Из определений немедленно вытекает, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} & F_0 & \\ f_0 \nearrow & & \downarrow \text{pr}_{T_{\gamma, \psi}} \\ S & & T_{\gamma, \psi} \\ & g \searrow & \downarrow \lambda^{-1} \\ & & \bar{G} \\ & & \downarrow \text{pr}_G \\ & & G \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \psi_*$$

Обозначим через F подгруппу в F_0 , порожденную образом f_0 , и через f — отображение f_0 , рассматриваемое как отображение множества S в F . Пусть g_* — ограничение ψ_* на F . Непосредственно видно, что g_* — единственное отображение, приводящее к нужной

нам коммутативной диаграмме, следовательно, (F, f) — искомая свободная группа. Кроме того, ясно, что отображение f инъективно.

Предположим теперь, что S не является конечным. Тогда легко так подобрать мощности, чтобы доказательство осталось справедливым. Именно, положим $T = S$ и возьмем за \bar{G} произведение группы G с прямой суммой (см. § 9) достаточного числа экземпляров группы Z , так чтобы было снова $\text{card}(\bar{G}) = \text{card}(T)$. В остальном доказательство проходит, как и прежде.

Отберем для каждого множества S одну свободную группу, определяемую S , и обозначим ее через $(F(S), f_S)$ или, короче, через $F(S)$. Она порождается образом отображения f_S . Множество S можно рассматривать как содержащееся в $F(S)$; тогда элементы из S называются *свободными образующими* группы $F(S)$. Если $g: S \rightarrow G$ — некоторое отображение, то мы будем обозначать через $g_*: F(S) \rightarrow G$ гомоморфизм, реализующий универсальность нашей свободной группы $F(S)$.

Пусть $\lambda: S \rightarrow S'$ — отображение одного множества в другое и $F(\lambda): F(S) \rightarrow F(S')$ — отображение $(f_{S'} \circ \lambda)_*$:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f_S} & F(S) \\ \lambda \downarrow & \searrow & \downarrow F(\lambda) \\ S' & \xrightarrow{f_{S'}} & F(S') \end{array}$$

Мы можем, таким образом, рассматривать F как функтор из категории множеств в категорию групп (функториальные свойства проверяются тривиально, проверка предоставляется читателю).

Если λ сюръективно, то $F(\lambda)$ также сюръективно. Доказательство снова предоставляется читателю.

Если два множества S, S' имеют одинаковую мощность, то они изоморфны в категории множеств (так как изоморфизм в этом случае — биекция!), и, следовательно, группа $F(S)$ изоморфна группе $F(S')$. Если S состоит из n элементов, то мы называем $F(S)$ *свободной группой с n образующими*.

Пусть G — группа и S — то же самое множество, что и G (т. е. G рассматривается как множество без групповой структуры). Имеем тождественное отображение $g: S \rightarrow G$ и, следовательно, сюръективный гомоморфизм

$$g_*: F(S) \rightarrow G,$$

который будет называться *каноническим*. Таким образом, всякая группа есть факторгруппа свободной группы.

Группы можно строить также с помощью, как говорят, *образующих* и *соотношений*. Пусть S — множество и $F(S)$ — свободная группа. Будем считать, что $f: S \rightarrow F(S)$ — вложение. Пусть R —

некоторое множество элементов из $F(S)$. Каждый элемент из R может быть записан в виде конечного произведения

$$\prod_{\nu=1}^n x_{\nu},$$

где каждое x_{ν} есть элемент из S или обратный для элемента из S . Пусть N — наименьшая нормальная подгруппа в $F(S)$, содержащая R , т. е. пересечение всех нормальных подгрупп в $F(S)$, содержащих R . Тогда $F(S)/N$ будет называться группой, *определенной образующими S и соотношениями R* .

Пример. Легко показать, что группа, определенная одной образующей a и соотношением $\{a^2\}$, имеет порядок 2. В упражнениях в конце главы предложены менее тривиальные примеры.

Канонический гомоморфизм $\varphi: F(S) \rightarrow F(S)/N$ удовлетворяет (очевидно) свойству универсальности относительно тех гомоморфизмов ψ группы $F(S)$ в группы G , для которых $\psi(x) = 1$ для всех $x \in R$. Ввиду этого группу $F(S)/N$ иногда называют группой, определенной образующими S и соотношениями $x = 1$ (для всех $x \in R$). Например, группа из предыдущего примера могла бы быть названа группой, определенной образующей a и соотношением $a^2 = 1$.

Предложение 8. *Копроизведения в категории групп существуют.*

Доказательство. Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ — семейство групп. Рассмотрим категорию \mathcal{C} , объектами которой являются семейства гомоморфизмов групп

$$\{g_i: G_i \rightarrow G\}_{i \in I},$$

с очевидными морфизмами. Нам нужно найти универсальный объект в этой категории. Для каждого индекса i возьмем за S_i то же самое множество, что и G_i , если G_i бесконечно, и произвольное счетное множество, если G_i конечно. Пусть S — множество, имеющее ту же мощность, что и теоретико-множественное объединение попарно не пересекающихся множеств S_i (т. е. их копроизведение в категории множеств). Пусть Γ — множество групповых структур на S и Φ_{γ} для каждого $\gamma \in \Gamma$ — множество всевозможных семейств гомоморфизмов

$$\varphi = \{\varphi_i: G_i \rightarrow S_{\gamma}\}.$$

Каждая пара (S_{γ}, φ) , где $\varphi \in \Phi_{\gamma}$, есть группа (φ использовано только как индекс). Положим

$$F_0 = \prod_{\gamma \in \Gamma} \prod_{\varphi \in \Phi_{\gamma}} (S_{\gamma}, \varphi)$$

и для каждого i определим гомоморфизм $f_i: G_i \rightarrow F_0$ следующим предписанием: его компонента для каждого множителя (S_γ, φ) совпадает с соответствующей компонентой гомоморфизма φ_i .

Пусть теперь $g = \{g_i: G_i \rightarrow G\}$ — некоторое семейство гомоморфизмов. Заменяя G , если необходимо, подгруппой, порожденной образами гомоморфизмов g_i , мы видим, что $\text{card}(G) \leq \text{card}(S)$, поскольку всякий элемент из G есть *конечное* произведение элементов из этих образов. Вложив G как множитель в произведение с достаточно большим набором экземпляров группы \mathbf{Z} , мы можем предполагать, что $\text{card}(G) = \text{card}(S)$. Существует гомоморфизм $g_*: F_0 \rightarrow G$, такой, что

$$f_i \circ g_* = g_i$$

для всех i . Действительно, мы можем без потери общности предполагать, что $G = S_\gamma$ для некоторого γ и $g = \psi$ для некоторого $\psi \in \Phi_\gamma$. В качестве g_* возьмем проекцию F_0 на множитель (S_γ, ψ) .

Пусть F — подгруппа в F_0 , порожденная объединением образов отображений f_i по всем i . Ограничение g_* на F есть единственный гомоморфизм, удовлетворяющий соотношениям $f_i \circ g_* = g_i$ для всех i , и наш универсальный объект, таким образом, построен.

Я обязан Эйленбергу изящным доказательством следующего предложения:

Предложение 9. Пусть A и B — две группы, теоретико-множественное пересечение которых есть $\{1\}$. Существует группа $A \circ B$, содержащая A и B в качестве подгрупп с тривиальным пересечением $A \cap B = \{1\}$ и обладающая следующим свойством. Всякий элемент $\neq 1$ из $A \circ B$ допускает единственное представление в виде произведения

$$a_1 \dots a_n \quad (n \geq 1, a_i \neq 1 \text{ для всех } i),$$

где $a_i \in A$ или $a_i \in B$, причем если $a_i \in A$, то $a_{i+1} \in B$, а если $a_i \in B$, то $a_{i+1} \in A$.

Доказательство. Возьмем в качестве $A \circ B$ множество последовательностей

$$a = (a_1, \dots, a_n) \quad (n \geq 0),$$

таких, что либо $n = 0$, и последовательность пуста, либо $n \geq 1$, и тогда элементы последовательности принадлежат A или B и все $\neq 1$, причем никакие два соседних элемента последовательности не принадлежат одновременно ни A , ни B . Пусть $b = (b_1, \dots, b_m)$. Определим произведение ab как последовательность

$(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$, если $a_n \in A, b_1 \in B$ или $a_n \in B, b_1 \in A$,

$(a_1, \dots, a_n b_1, \dots, b_m)$, если $a_n, b_1 \in A$ или $a_n, b_1 \in B$ и $a_n b_1 \neq 1$,

$(a_1, \dots, a_{n-1})(b_2, \dots, b_m)$ (определено по индукции),

если $a_n, b_1 \in A$ или $a_n, b_1 \in B$ и $a_n b_1 = 1$.

Случай, когда $n=0$ или $m=0$, охватывается первым случаем, при этом пустая последовательность служит единичным элементом в $A \circ B$. Ясно, что

$$(a_1, \dots, a_n)(a_n^{-1}, \dots, a_1^{-1}) = \text{единичный элемент},$$

так что в проверке нуждается только ассоциативность. Пусть $c = (c_1, \dots, c_r)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $m=0$, т. е. последовательность b пуста. Тогда, очевидно, $(ab)c = a(bc)$. То же самое будет, если $n=0$ или $r=0$. Теперь рассмотрим случай $m=1$. Пусть $b = (x)$, где $x \in A$, $x \neq 1$. Тогда в каждом возможном случае проверяется, что $(ab)c = a(bc)$. Вот эти случаи:

$(a_1, \dots, a_n, x, c_1, \dots, c_r)$,	если $a_n \in B$ и $c_1 \in B$,
$(a_1, \dots, a_n x, c_1, \dots, c_r)$,	если $a_n \in A$, $a_n x \neq 1$, $c_1 \in B$,
$(a_1, \dots, a_n, x c_1, \dots, c_r)$,	если $a_n \in B$, $c_1 \in A$, $x c_1 \neq 1$,
$(a_1, \dots, a_{n-1})(c_1, \dots, c_r)$,	если $a_n = x^{-1}$ и $c_1 \in B$,
$(a_1, \dots, a_n)(c_2, \dots, c_r)$,	если $a_n \in B$ и $c_1 = x^{-1}$,
$(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n x c_1, c_2, \dots, c_r)$,	если $a_n, c_1 \in A$, $a_n x c_1 \neq 1$,
$(a_1, \dots, a_{n-1})(c_2, \dots, c_r)$,	если $a_n, c_1 \in A$ и $a_n x c_1 = 1$.

При $m > 1$ применяем индукцию. Записав последовательность в виде $b = b' b''$, где b' и b'' — более короткие последовательности, получим

$$\begin{aligned} (ab)c &= (a(b'b''))c = ((ab')b'')c = (ab')(b''c), \\ a(bc) &= a((b'b'')c) = a(b'(b''c)) = (ab')(b''c), \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Мы имеем очевидные вложения групп A и B в $A \circ B$ и, отождествляя A , B с их образами в $A \circ B$, получаем доказательство нашего предложения.

По индукции можно доказать аналогичный результат для нескольких множителей. В частности, для свободной группы получаем

Следствие 1. Пусть $F(S)$ — свободная группа, определенная множеством S , и x_1, \dots, x_n — различные элементы из S . Пусть v_1, \dots, v_r — целые числа $\neq 0$ и i_1, \dots, i_r — такие целые числа,

$$1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n,$$

что $i_j \neq i_{j+1}$ для $j=1, \dots, r-1$. Тогда

$$x_{i_1}^{v_1}, \dots, x_{i_r}^{v_r} \neq 1.$$

Доказательство. Пусть G_1, \dots, G_n — циклические группы, порожденные элементами x_1, \dots, x_n . Рассмотрим группу $G = G_1 \circ \dots \circ G_n$. Пусть

$$F(S) \rightarrow G$$

— гомоморфизм, переводящий каждый элемент x_i в себя, а все другие элементы из S — в единичный элемент группы G . Наше утверждение теперь очевидно.

Следствие 2. Пусть S — множество из n элементов x_1, \dots, x_n , $n \geq 1$, и G_1, \dots, G_n — бесконечные циклические группы, порожденные этими элементами. Тогда отображение

$$F(S) \rightarrow G_1 \circ \dots \circ G_n,$$

переводящее каждое x_i в себя, является изоморфизмом.

Доказательство. Это отображение, очевидно, сюръективно и инъективно.

Следствие 3. Пусть G_1, \dots, G_n — группы. Гомоморфизм

$$G_1 \amalg \dots \amalg G_n \rightarrow G_1 \circ \dots \circ G_n$$

их копроизведения в $G_1 \circ \dots \circ G_n$, индуцированный естественными вложениями $G_i \rightarrow G_1 \circ \dots \circ G_n$, является изоморфизмом.

Доказательство. Опять-таки очевидно, что этот гомоморфизм инъективен и сюръективен.

§ 9. Прямые суммы и свободные абелевы группы

Абелевы группы образуют категорию, которую можно обозначить символом Ab . Заметим, что если $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство абелевых групп, то их произведение в категории групп является также произведением в категории абелевых групп, т. е. если мы образуем теоретико-множественное произведение

$$\prod_{i \in I} A_i$$

и наделим его структурой группы с помощью покомпонентного умножения, то оно станет абелевой группой, обладающей необходимым свойством универсальности.

Копроизведение в категории абелевых групп обычно называется прямой суммой.

Предложение 10. Прямые суммы в категории абелевых групп существуют.

Доказательство. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство абелевых групп. Рассмотрим подмножество A прямого произведения $\prod A_i$, состоящее из всех семейств $(x_i)_{i \in I}$, $x_i \in A_i$, таких, что $x_i = 0$ для всех, кроме