Пусть $\mathscr{C}$ — некоторая категория. Объект P в $\mathscr{C}$ называется *универсально притягивающим*, если существует единственный морфизм каждого объекта из $\mathscr{C}$ в P, и называется *универсально отталкивающим*, если для каждого объекта из $\mathscr{C}$ существует единственный морфизм P в этот объект.

Когда смысл ясен из контекста, мы будем называть такой объект P просто *универсальным*. Так как универсальный объект обладает тождественным морфизмом в себя, то ясно, что если P, P' — два универсальных объекта в $\mathscr{C}$, то между ними существует однозначно определенный изоморфизм.

Посмотрим теперь, как это применяется, скажем, к копроизведению. Пусть $\mathscr{A}$ — категория и $\{A_i\}$ — семейство объектов в $\mathscr{A}$. Определим новую категорию $\mathscr{C}$, взяв в качестве ее объектов семейства морфизмов $\{f_i\colon A_i \to B\}_{i \in I}$. Если даны два таких семейства

$$\{f_i\colon A_i \to B\} \quad \text{и} \quad \{f'_i\colon A_i \to B'\},$$

то морфизмом первого объекта во второй будет по определению морфизм $\varphi\colon B \to B'$ в $\mathscr{A}$, такой, что $\varphi \circ f_i = f'_i$ для всех i. Тогда копроизведение семейства $\{A_i\}$ — это просто универсальный объект в $\mathscr{C}$.

Копроизведение семейства $\{A_i\}$ будет обозначаться так:

$$\coprod_{i \in I} A_i.$$

Копроизведение двух объектов A, B будет также обозначаться через

$$A \coprod B.$$

Из предположения единственности вытекает, что копроизведение определено однозначно (с точностью до однозначно определенного изоморфизма). Аналогичное замечание справедливо и для прямого произведения.

§ 8. Свободные группы

Пусть I — некоторое множество, и для каждого $i \in I$ пусть G_i — некоторая группа Пусть $G = \prod G_i$ — теоретико-множественное произведение множеств G_i. Тогда G — это множество всех семейств $(x_i)_{i \in I}$, где $x_i \in G_i$. Мы можем определить на G групповую структуру посредством покомпонентного умножения; именно, если $(x_i)_{i \in I}$ и $(y_i)_{i \in I}$ — два элемента из G, то их произведением считаем семейство $(x_i y_i)_{i \in I}$. Обратным к $(x_i)_{i \in I}$ будет $(x_i^{-1})_{i \in I}$. Ясно, что при этом G — группа и что проекции

$$f_i\colon G \to G_i$$

являются гомоморфизмами. Поскольку G — теоретико-множественное произведение для G_i, то получаем

Предложение 5. *Группа* $\prod G_i$ *вместе с гомоморфизмами проектирования образует произведение семейства* $\{G_i\}_{i \in I}$ *в категории групп.*

Действительно, если $\{g_i: G' \to G_i\}_{i \in I}$ — семейство гомоморфизмов, то существует единственный гомоморфизм $g: G' \to \prod G_i$, для которого коммутативна требуемая диаграмма. Это — гомоморфизм, определяемый равенством $g(x')_i = g_i(x')$ для $x' \in G'$ и всякого $i \in I$.

Заметим, что каждая группа G_j допускает инъективный гомоморфизм в произведение на его j-ю компоненту, а именно отображение $\lambda_j: G_j \to \prod\limits_i G_i$, такое, что i-я компонента элемента $\lambda_j(x)$ для всякого $x \in G_j$ равна единичному элементу группы G_i, если $i \neq j$, и равна самому x, если $i = j$. Это вложение будет называться *каноническим*.

Имеется полезный критерий того, что группа есть прямое произведение своих подгрупп.

Предложение 6. *Пусть G — группа и H, K — две такие ее подгруппы, что $H \cap K = e$, $HK = G$ и $xy = yx$ для всех $x \in H$ и $y \in K$. Тогда отображение*

$$H \times K \to G,$$

при котором $(x, y) \mapsto xy$, есть изоморфизм.

Доказательство. Это отображение, очевидно, гомоморфизм, и притом сюръективный, так как $HK = G$. Если (x, y) принадлежит его ядру, то $x = y^{-1}$, так что x лежит сразу и в H, и в K, а потому $x = e$, следовательно, также $y = e$ и наше отображение — изоморфизм.

Заметим, что предложение 6 обобщается по индукции на любое конечное число подгрупп $H_1, \ldots, H_n$, попарно коммутирующих друг с другом и таких, что $H_1 \ldots H_n = G$ и

$$H_{i+1} \cap (H_1 \ldots H_i) = e.$$

В этом случае группа G изоморфна прямому произведению

$$H_1 \times \ldots \times H_n.$$

Пусть G — группа и S — подмножество в G. Напомним, что G *порождается* множеством S, если каждый элемент из G может быть записан в виде конечного произведения элементов из S и их обратных (причем пустое произведение всегда представляет единичный элемент G). Элементы из S называются тогда *образующими*. Если в группе G существует конечное множество образующих, то мы называем ее *конечно порожденной*. Пусть S — некоторое множество. Мы говорим, что отображение $\varphi\colon S \to G$ *порождает* G, если его образ порождает G.

Пусть $f\colon S \to F$ — отображение множества S в некоторую группу, $g\colon S \to G$ — другое такое отображение. Если $f(S)$ (или, как мы условились говорить, f) порождает F, то, очевидно, существует самое большее один гомоморфизм ψ группы F в G, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & F \arrow[dl, "\psi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Рассмотрим теперь категорию $\mathscr{C}$, объектами которой являются отображения множества S в группы. Если $f : S \to G$ и $f'\colon S \to G'$ — два объекта в этой категории, то под морфизмом из f в f' мы понимаем гомоморфизм $\varphi\colon G \to G'$, для которого $\varphi \circ f = f'$, т. е. для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "\varphi"] \\ S \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

Под *свободной группой*, определенной множеством S, мы будем понимать универсальный объект в этой категории.

Предложение 7. *Для всякого множества S существует определенная им свободная группа (F, f). При этом отображение f инъективно и порождает группу F.*

Доказательство (я обязан этим доказательством Ж. Титсу). Ради простоты мы сначала проведем доказательство для случая, когда S конечно. Пусть T — бесконечное счетное множество, Γ — множество всех групповых структур на T и T_γ — соответствующая группа для каждого $\gamma \in \Gamma$. Обозначим через M_γ множество всех отображений множества S в T_γ. Пусть $T_{\gamma, \varphi}$ — теоретико-множественное произведение группы T_γ и множества $\{\varphi\}$, состоящего из одного элемента; таким образом, φ используется как индекс, так что $T_{\gamma,\varphi}$ — это „та же самая“ группа, что и T_γ, но занумерованная посредством φ. Введем декартово произведение

$$F_0 = \prod_{\gamma \in \Gamma} \prod_{\varphi \in M_\gamma} T_{\gamma, \varphi}$$

групп $T_{\gamma, \varphi}$. Определим отображение

$$f_0\colon S \to F_0,$$

переводя S в множитель $T_{\gamma, \varphi}$ посредством φ. Мы утверждаем, что для каждого отображения $g\colon S \to G$ множества S в произвольную группу G существует гомоморфизм $g_*\colon F_0 \to G$, такой, что коммутативна обычная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & F_0 \arrow[d, "g_*"] \\
S \arrow[ur, "f_0"] \arrow[r, "g"'] & G
\end{tikzcd}$$

т. е. $g_* \circ f_0 = g$. *Для доказательства заметим сначала*, что можно предполагать, что g порождает G, просто ограничившись рассмотрением подгруппы в G, порожденной образом g. В этом случае $\operatorname{card} G \leqslant \operatorname{card} T$. Пусть $\overline{G}$ — произведение группы G и группы целых чисел $\mathbf{Z}$, так что $\operatorname{card}(\overline{G}) = \operatorname{card}(T)$. Тогда для некоторого $\gamma \in \Gamma$ существует изоморфизм

$$\lambda\colon \overline{G} \to T_\gamma$$

и G естественным образом вкладывается в $\overline{G} = G \times \mathbf{Z}$ как прямой сомножитель. Обозначим это вложение через h, так что $h(G) = G \times \{0\}$. Мы имеем теперь следующую последовательность гомоморфизмов и отображений:

$$S \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} \overline{G} = G \times \mathbf{Z} \xrightarrow{\lambda} T_\gamma.$$

Пусть $\psi = \lambda \circ h \circ g$ — их композиция. Тогда $\psi \in M_\gamma$, и мы можем рассматривать ψ как отображение множества S в $T_{\gamma, \psi}$. Положим $\psi_* = \mathrm{pr}_G \circ \lambda^{-1} \circ \mathrm{pr}_{\gamma, \psi}$, где $\mathrm{pr}_{\gamma, \psi}$ — проекция группы F_0 на множитель $T_{\gamma, \psi}$. Из определений немедленно вытекает, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
 & F_0 \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\gamma, \psi}"] \arrow[dddd, bend left=60, "\psi_*"] \\
 & T_{\gamma, \psi} \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \\
S \arrow[uur, "f_0"] \arrow[ddr, "g"'] & \overline{G} \arrow[d, "\mathrm{pr}_G"] \\
 & G \\
 &
\end{tikzcd}$$

Обозначим через F подгруппу в F_0, порожденную образом f_0, и через f — отображение f_0, рассматриваемое как отображение множества S в F. Пусть g_* — ограничение ψ_* на F. Непосредственно видно, что g_* — единственное отображение, приводящее к нужной нам коммутативной диаграмме, следовательно, (F, f) — искомая свободная группа. Кроме того, ясно, что отображение f инъективно.

Предположим теперь, что S не является конечным. Тогда легко так подобрать мощности, чтобы доказательство осталось справедливым. Именно, положим $T = S$ и возьмем за $\bar{G}$ произведение группы G с прямой суммой (см. § 9) достаточного числа экземпляров группы Z, так чтобы было снова $\operatorname{card}(\bar{G}) = \operatorname{card}(T)$. В остальном доказательство проходит, как и прежде.

Отберем для каждого множества S одну свободную группу, определяемую S, и обозначим ее через $(F(S), f_S)$ или, короче, через $F(S)$. Она порождается образом отображения f_S. Множество S можно рассматривать как содержащееся в $F(S)$; тогда элементы из S называются *свободными образующими* группы $F(S)$. Если $g\colon S \to G$ — некоторое отображение, то мы будем обозначать через $g_*\colon F(S) \to G$ гомоморфизм, реализующий универсальность нашей свободной группы $F(S)$.

Пусть $\lambda\colon S \to S'$ — отображение одного множества в другое и $F(\lambda)\colon F(S) \to F(S')$ — отображение $(f_{S'} \circ \lambda)_*$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f_S"] \arrow[d, "\lambda"'] \arrow[dr] & F(S) \arrow[d, "F(\lambda)"] \\ S' \arrow[r, "f_{S'}"'] & F(S') \end{tikzcd}$$

Мы можем, таким образом, рассматривать F как функтор из категории множеств в категорию групп (функториальные свойства проверяются тривиально, проверка предоставляется читателю).

Если λ сюръективно, то $F(\lambda)$ также сюръективно. Доказательство снова предоставляется читателю.

Если два множества S, S' имеют одинаковую мощность, то они изоморфны в категории множеств (так как изоморфизм в этом случае — биекция!), и, следовательно, группа $F(S)$ изоморфна группе $F(S')$. Если S состоит из n элементов, то мы называем $F(S)$ *свободной группой с n образующими.*

Пусть G — группа и S — то же самое множество, что и G (т. е. G рассматривается как множество без групповой структуры). Имеем тождественное отображение $g\colon S \to G$ и, следовательно, сюръективный гомоморфизм

$$g_*\colon F(S) \to G,$$

который будет называться *каноническим.* Таким образом, всякая группа есть факторгруппа свободной группы.

Группы можно строить также с помощью, как говорят, *образующих* и *соотношений.* Пусть S — множество и $F(S)$ — свободная группа. Будем считать, что $f\colon S \to F(S)$ — вложение. Пусть R —

некоторое множество элементов из $F(S)$. Каждый элемент из R может быть записан в виде конечного произведения

$$\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu,$$

где каждое x_ν есть элемент из S или обратный для элемента из S. Пусть N — наименьшая нормальная подгруппа в $F(S)$, содержащая R, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп в $F(S)$, содержащих R. Тогда $F(S)/N$ будет называться группой, *определенной образующими S и соотношениями R*.

Пример. Легко показать, что группа, определенная одной образующей a и соотношением $\{a^2\}$, имеет порядок 2. В упражнениях в конце главы предложены менее тривиальные примеры.

Канонический гомоморфизм φ: $F(S) \to F(S)/N$ удовлетворяет (очевидно) свойству универсальности относительно тех гомоморфизмов ψ группы $F(S)$ в группы G, для которых $\psi(x) = 1$ для всех $x \in R$. Ввиду этого группу $F(S)/N$ иногда называют группой, определенной образующими S и соотношениями $x = 1$ (для всех $x \in R$). Например, группа из предыдущего примера могла бы быть названа группой, определенной образующей a и соотношением $a^2 = 1$.

Предложение 8. *Копроизведения в категории групп существуют.*

Доказательство. Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ — семейство групп. Рассмотрим категорию $\mathscr{C}$, объектами которой являются семейства гомоморфизмов групп

$$\{g_i\colon\ G_i \to G\}_{i \in I},$$

с очевидными морфизмами. Нам нужно найти универсальный объект в этой категории. Для каждого индекса i возьмем за S_i то же самое множество, что и G_i, если G_i бесконечно, и произвольное счетное множество, если G_i конечно. Пусть S — множество, имеющее ту же мощность, что и теоретико-множественное объединение попарно не пересекающихся множеств S_i (т. е. их копроизведение в категории множеств). Пусть Γ — множество групповых структур на S и Φ_γ для каждого $\gamma \in \Gamma$ — множество всевозможных семейств гомоморфизмов

$$\varphi = \{\varphi_i\colon\ G_i \to S_\gamma\}.$$

Каждая пара (S_γ, φ), где $\varphi \in \Phi_\gamma$, есть группа (φ использовано только как индекс). Положим

$$F_0 = \prod_{\gamma \in \Gamma} \prod_{\varphi \in \Phi_\gamma} (S_\gamma, \varphi)$$

и для каждого i определим гомоморфизм $f_i: G_i \to F_0$ следующим предписанием: его компонента для каждого множителя (S_γ, φ) совпадает с соответствующей компонентой гомоморфизма φ_i.

Пусть теперь $g = \{g_i: G_i \to G\}$ — некоторое семейство гомоморфизмов. Заменяя G, если необходимо, подгруппой, порожденной образами гомоморфизмов g_i, мы видим, что $\operatorname{card}(G) \leqslant \operatorname{card}(S)$, поскольку всякий элемент из G есть *конечное* произведение элементов из этих образов Вложив G как множитель в произведение с достаточно большим набором экземпляров группы $\mathbf{Z}$, мы можем предполагать, что $\operatorname{card}(G) = \operatorname{card}(S)$ Существует гомоморфизм $g_*: F_0 \to G$, такой, что

$$f_i \circ g_* = g_i$$

для всех i. Действительно, мы можем без потери общности предполагать, что $G = S_\gamma$ для некоторого γ и $g = \psi$ для некоторого $\psi \in \Phi_\gamma$. В качестве g_* возьмем проекцию F_0 на множитель (S_γ, ψ).

Пусть F — подгруппа в F_0, порожденная объединением образов отображений f_i по всем i. Ограничение g_* на F есть единственный гомоморфизм, удовлетворяющий соотношениям $f_i \circ g_* = g_i$ для всех i, и наш универсальный объект, таким образом, построен.

Я обязан Эйленбергу изящным доказательством следующего предложения:

Предложение 9. *Пусть A и B — две группы, теоретико-множественное пересечение которых есть $\{1\}$. Существует группа $A \circ B$, содержащая A и B в качестве подгрупп с тривиальным пересечением $A \cap B = \{1\}$ и обладающая следующим свойством Всякий элемент $\neq 1$ из $A \circ B$ допускает единственное представление в виде произведения*

$$a_1 \ldots a_n \qquad (n \geqslant 1,\ a_i \neq 1 \quad \text{для всех} \quad i),$$

где $a_i \in A$ или $a_i \in B$, причем если $a_i \in A$, то $a_{i+1} \in B$, а если $a_i \in B$, то $a_{i+1} \in A$.

Доказательство. Возьмем в качестве $A \circ B$ множество последовательностей

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \qquad (n \geqslant 0),$$

таких, что либо $n = 0$, и последовательность пуста, либо $n \geqslant 1$, и тогда элементы последовательности принадлежат A или B и все $\neq 1$, причем никакие два соседних элемента последовательности не принадлежат одновременно ни A, ни B. Пусть $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Определим произведение ab как последовательность

$(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$, если $a_n \in A$, $b_1 \in B$ или $a_n \in B$, $b_1 \in A$,
$(a_1, \ldots, a_n b_1, \ldots, b_m)$, если $a_n, b_1 \in A$ или $a_n, b_1 \in B$ и $a_n b_1 \neq 1$,
$(a_1, \ldots, a_{n-1})(b_2, \ldots, b_m)$ (определено по индукции),
если $a_n, b_1 \in A$ или $a_n, b_1 \in B$ и $a_n b_1 = 1$.

Случай, когда $n=0$ или $m=0$, охватывается первым случаем, при этом пустая последовательность служит единичным элементом в $A \circ B$. Ясно, что

$$(a_1, \ldots, a_n)(a_n^{-1}, \ldots, a_1^{-1}) = \text{единичный элемент},$$

так что в проверке нуждается только ассоциативность. Пусть $c = (c_1, \ldots, c_r)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $m=0$, т. е. последовательность b пуста. Тогда, очевидно, $(ab)c = a(bc)$. То же самое будет, если $n=0$ или $r=0$. Теперь рассмотрим случай $m=1$. Пусть $b=(x)$, где $x \in A$, $x \neq 1$. Тогда в каждом возможном случае проверяется, что $(ab)c = a(bc)$. Вот эти случаи:

$(a_1, \ldots, a_n, x, c_1, \ldots, c_r)$,	если	$a_n \in B$ и $c_1 \in B$,
$(a_1, \ldots, a_n x, c_1, \ldots, c_r)$,	если	$a_n \in A$, $a_n x \neq 1$, $c_1 \in B$,
$(a_1, \ldots, a_n, x c_1, \ldots, c_r)$,	если	$a_n \in B$, $c_1 \in A$, $x c_1 \neq 1$,
$(a_1, \ldots, a_{n-1})(c_1, \ldots, c_r)$,	если	$a_n = x^{-1}$ и $c_1 \in B$,
$(a_1, \ldots, a_n)(c_2, \ldots, c_r)$,	если	$a_n \in B$ и $c_1 = x^{-1}$,
$(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n x c_1, c_2, \ldots, c_r)$,	если	a_n, $c_1 \in A$, $a_n x c_1 \neq 1$,
$(a_1, \ldots, a_{n-1})(c_2, \ldots, c_r)$,	если	a_n, $c_1 \in A$ и $a_n x c_1 = 1$.

При $m > 1$ применяем индукцию. Записав последовательность в виде $b = b'b''$, где b' и b'' — более короткие последовательности, получим

$$(ab)c = (a(b'b''))c = ((ab')b'')c = (ab')(b''c),$$
$$a(bc) = a((b'b'')c) = a(b'(b''c)) = (ab')(b''c),$$

что и требовалось показать.

Мы имеем очевидные вложения групп A и B в $A \circ B$ и, отождествляя A, B с их образами в $A \circ B$, получаем доказательство нашего предложения.

По индукции можно доказать аналогичный результат для нескольких множителей. В частности, для свободной группы получаем

Следствие 1. *Пусть $F(S)$ — свободная группа, определенная множеством S, и $x_1, \ldots, x_n$ — различные элементы из S. Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_r$ — целые числа $\neq 0$ и $i_1, \ldots, i_r$ — такие целые числа,*

$$1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n,$$

что $i_j \neq i_{j+1}$ для $j = 1, \ldots, r-1$. Тогда

$$x_{i_1}^{\nu_1}, \ldots, x_{i_r}^{\nu_r} \neq 1.$$

Доказательство. Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — циклические группы, порожденные элементами $x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим группу $G = G_1 \circ \ldots \circ G_n$. Пусть

$$F(S) \to G$$

— гомоморфизм, переводящий каждый элемент x_i в себя, а все другие элементы из S — в единичный элемент группы G. Наше утверждение теперь очевидно.

Следствие 2. *Пусть S — множество из n элементов $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 1$, и $G_1, \ldots, G_n$ — бесконечные циклические группы, порожденные этими элементами. Тогда отображение*

$$F(S) \to G_1 \circ \ldots \circ G_n,$$

переводящее каждое x_i в себя, является изоморфизмом.

Доказательство. Это отображение, очевидно, сюръективно и инъективно.

Следствие 3. *Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — группы. Гомоморфизм*

$$G_1 \coprod \ldots \coprod G_n \to G_1 \circ \ldots \circ G_n$$

их копроизведения в $G_1 \circ \ldots \circ G_n$, индуцированный естественными вложениями $G_i \to G_1 \circ \ldots \circ G_n$, является изоморфизмом.

Доказательство. Опять-таки очевидно, что этот гомоморфизм инъективен и сюръективен.

§ 9. Прямые суммы и свободные абелевы группы

Абелевы группы образуют категорию, которую можно обозначить символом Ab. Заметим, что если $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство абелевых групп, то их произведение в категории групп является также произведением в категории абелевых групп, т. е. если мы образуем теоретико-множественное произведение

$$\prod_{i \in I} A_i$$

и наделим его структурой группы с помощью покомпонентного умножения, то оно станет абелевой группой, обладающей необходимым свойством универсальности.

Копроизведение в категории абелевых групп обычно называется прямой суммой.

Предложение 10. *Прямые суммы в категории абелевых групп существуют.*

Доказательство. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство абелевых групп. Рассмотрим подмножество A прямого произведения $\prod A_i$, состоящее из всех семейств $(x_i)_{i \in I}$, $x_i \in A_i$, таких, что $x_i = 0$ для всех, кроме