

на подгруппу в  $B$ . В силу теоремы 4 предыдущего параграфа заключаем, что  $tA$  свободна, откуда и  $A$  свободна.

**Теорема 8.** Пусть  $A$  — конечно порожденная абелева группа и  $A_t$  — ее подгруппа, состоящая из всех элементов, имеющих конечный период. Тогда  $A_t$  конечна и  $A/A_t$  свободна. При этом в  $A$  существует свободная подгруппа  $B$ , такая, что  $A$  есть прямая сумма  $A_t$  и  $B$ .

**Доказательство.** Напомним, что конечно порожденная периодическая абелева группа очевидным образом конечна. Пусть  $A$  порождается  $n$  элементами, и пусть  $F$  — свободная абелева группа с  $n$  образующими. В силу свойства универсальности существует сюръективный гомоморфизм

$$F \xrightarrow{\Phi} A$$

группы  $F$  на  $A$ . Подгруппа  $\Phi^{-1}(A_t)$  в  $F$  конечно порождена в силу теоремы 4. Следовательно,  $A_t$  сама конечно порождена и потому конечна.

Далее, докажем, что  $A/A_t$  не имеет кручения. Пусть  $\bar{x}$  — некоторый элемент в  $A/A_t$ , такой, что  $mx = 0$  для некоторого целого  $m \neq 0$ . Тогда для любого представителя  $x$  класса  $\bar{x}$  в  $A$  имеем  $mx \in A_t$ , откуда  $qmx = 0$  для некоторого целого  $q \neq 0$ . Следовательно,  $x \in A_t$ , так что  $\bar{x} = 0$  и  $A/A_t$  свободна от кручения. Значит, в силу теоремы 7  $A/A_t$  свободна. Для завершения доказательства используем лемму к теореме 4.

Ранг факторгруппы  $A/A_t$  называется также *рангом* группы  $A$ .

### § 11. Дуальная группа

Пусть  $A$  — абелева группа показателя  $m \geq 1$ . Это означает, что  $mx = 0$  для каждого элемента  $x \in A$ . Пусть  $Z_m$  — циклическая группа порядка  $m$ . Будем обозначать через  $A^*$  или через  $\text{Hom}(A, Z_m)$  группу гомоморфизмов группы  $A$  в  $Z_m$  и называть ее *дуальной* к  $A$ .

Пусть  $f: A \rightarrow B$  — гомоморфизм абелевых групп, причем обе группы имеют показатель  $m$ . Тогда  $f$  индуцирует гомоморфизм

$$f^*: B^* \rightarrow A^*.$$

Именно, для каждого  $\psi \in B^*$  полагаем  $f^*(\psi) = \psi \circ f$ . Тривиально проверяется, что  $f^*$  — гомоморфизм. Можно рассматривать  $\text{Hom}(A, Z_m)$  как контравариантный функтор на категории абелевых групп показателя  $m$ . Действительно, свойства

$$\text{id}^* = \text{id} \quad \text{и} \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

проверяются тривиально.

**Теорема 9.** Если  $A$  — конечная абелева группа, представляемая в виде произведения  $A = B \times C$ , то  $A^*$  изоморфна  $B^* \times C^*$  (сам изоморфизм описан ниже). Всякая конечная абелева группа изоморфна своей дуальной.

**Доказательство.** Рассмотрим две проекции

$$\begin{array}{ccc} & B \times C & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ B & & C \end{array}$$

произведения  $B \times C$  на две его компоненты. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\begin{array}{ccc} & (B \times C)^* & \\ f^* \swarrow & & \searrow g^* \\ B^* & & C^* \end{array}$$

Мы утверждаем, что эти гомоморфизмы индуцируют изоморфизм  $B^* \times C^*$  на  $(B \times C)^*$ .

Действительно, пусть  $\psi_1, \psi_2$  лежат в  $\text{Hom}(B, Z_m)$  и  $\text{Hom}(C, Z_m)$  соответственно. Тогда пара  $(\psi_1, \psi_2) \in B^* \times C^*$ , и мы определим соответствующий ей элемент в  $(B \times C)^*$ , положив

$$(\psi_1, \psi_2)(x, y) = \psi_1(x) + \psi_2(y)$$

для  $(x, y) \in B \times C$ . Таким образом, получаем гомоморфизм

$$B^* \times C^* \rightarrow (B \times C)^*.$$

Обратно, пусть  $\psi \in (B \times C)^*$ . Тогда

$$\psi(x, y) = \psi(x, 0) + \psi(0, y).$$

Функция  $\psi_1$ , определенная на  $B$  условием  $\psi_1(x) = \psi(x, 0)$ , принадлежит  $B^*$ , и аналогично функция  $\psi_2$ , определенная на  $C$  условием  $\psi_2(y) = \psi(0, y)$ , принадлежит  $C^*$ . Таким образом, получаем гомоморфизм

$$(B \times C)^* \rightarrow B^* \times C^*,$$

очевидно, обратный гомоморфизму, определенному перед этим. Следовательно, мы получаем изоморфизм, что и доказывает первое утверждение нашей теоремы.

Мы можем записать любую конечную абелеву группу как произведение циклических групп. Таким образом, чтобы доказать второе утверждение, достаточно рассмотреть случай циклических групп.

Пусть  $A$  — циклическая группа, порожденная элементом  $x$  периода  $n$ . Тогда  $n \mid m$  и  $Z_m$  имеет ровно одну циклическую подгруппу порядка  $n$ ,  $Z_n$  (упражнение 20). Если  $\psi: A \rightarrow Z_m$  — гомоморфизм и  $x$  — образующая для  $A$ , то ее период служит показателем для  $\psi(x)$ , так что

$\psi(x)$ , а следовательно и  $\psi(A)$ , содержится в  $Z_n$ . Пусть  $y$  — образующая для  $Z_n$ . Имеем изоморфизм

$$\psi_1: A \rightarrow Z_n,$$

для которого  $\psi_1(x) = y$ . Для каждого целого  $k$ ,  $0 \leq k < n$ , имеем гомоморфизм  $k\psi_1$ , для которого

$$(k\psi_1)(x) = k \cdot \psi_1(x) = \psi_1(kx).$$

Таким образом, мы получаем циклическую подгруппу в  $A^*$ , состоящую из  $n$  элементов  $k\psi_1$  ( $0 \leq k < n$ ). Обратно, любой элемент  $\psi$  из  $A^*$  однозначно определяется своим действием на образующую  $x$  и должен переводить  $x$  в один из  $n$  элементов  $ky$  ( $0 \leq k < n$ ) группы  $Z_n$ . Следовательно,  $\psi$  совпадает с одним из отображений  $k\psi_1$ . Эти отображения составляют всю группу  $A^*$ , которая, таким образом, является циклической группой порядка  $n$  с образующей  $\psi_1$ . Это доказывает нашу теорему.

При рассмотрении дуальных групп мы используем различные реализации циклических групп  $Z_m$ . Такие группы встречаются во многих приложениях, например группа комплексных корней  $m$ -й степени из единицы или подгруппа порядка  $m$  в  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  и т. д.

Пусть  $A$  и  $A'$  — две абелевы группы. *Билинейное* отображение произведения  $A \times A'$  в абелеву группу  $C$  — это отображение

$$A \times A' \rightarrow C,$$

обозначаемое через

$$(x, x') \mapsto \langle x, x' \rangle$$

и обладающее следующим свойством: для каждого  $x \in A$  функция  $x' \mapsto \langle x, x' \rangle$  есть гомоморфизм и аналогично для каждого  $x' \in A'$  функция  $x \mapsto \langle x, x' \rangle$  есть гомоморфизм.

Частным случаем билинейного отображения является отображение

$$A \times \text{Hom}(A, C) \rightarrow C,$$

которое каждой паре  $(x, f)$ , где  $x \in A$  и  $f \in \text{Hom}(A, C)$ , сопоставляет элемент  $f(x)$  из  $C$ .

Билинейное отображение называется также *спариванием*.

Элемент  $x \in A$  называется *ортогональным* (или *перпендикулярным*) подмножеству  $S'$  в  $A'$ , если  $\langle x, x' \rangle = 0$  для всех  $x' \in S'$ . Ясно, что множество элементов  $x \in A$ , ортогональных к  $S'$ , образует подгруппу в  $A$ . Аналогично определяются элементы из  $A'$ , ортогональные к подмножествам в  $A$ .

*Ядро слева* нашего билинейного отображения — это подгруппа в  $A$ , ортогональная ко всей группе  $A'$ . Аналогично определяем ядро справа.

Для заданного билинейного отображения  $A \times A' \rightarrow C$  обозначим через  $B, B'$  его ядра слева и справа. Всякий элемент  $x'$  из  $A'$  опре-

деляет при помощи соответствия  $x \mapsto (x, x')$  некоторый элемент из  $\text{Hom}(A, C)$ , который мы будем обозначать через  $\psi_{x'}$ . Так как  $\psi_{x'}$  обращается в нуль на  $B$ , то мы видим, что, на самом деле,  $\psi_{x'}$  будет гомоморфизмом  $A/B$  в  $C$ . Кроме того,  $\psi_{x'} = \psi_{y'}$ , если  $x', y'$  — такие элементы из  $A'$ , что

$$x' \equiv y' \pmod{B'}.$$

Следовательно,  $\psi: x' \mapsto \psi_{x'}$  есть в действительности гомоморфизм

$$0 \rightarrow A'/B' \rightarrow \text{Hom}(A/B, C),$$

который инъективен, поскольку мы определили  $B'$  как группу, ортогональную к  $A$ . Аналогично мы получаем инъективный гомоморфизм

$$0 \rightarrow A/B \rightarrow \text{Hom}(A'/B', C).$$

Предположим, что группа  $C$  — циклическая порядка  $m$ . Тогда  $m\psi_{x'} = \psi_{mx'} = 0$  для любого  $x' \in A'$ , откуда  $A'/B'$  имеет показатель  $m$ . Точно так же и  $A/B$  имеет показатель  $m$ .

**Теорема 10.** Пусть  $A \times A' \rightarrow C$  — билинейное отображение двух абелевых групп в циклическую группу  $C$  порядка  $m$  и  $B, B'$  — его ядра соответственно слева и справа. Предположим, что факторгруппа  $A'/B'$  конечна. Тогда  $A/B$  конечна и  $A'/B'$  изоморфна дуальной группе  $A/B$  (относительно нашего отображения  $\psi$ ).

**Доказательство.** Вложение  $A/B$  в  $\text{Hom}(A'/B', C)$  показывает, что группа  $A/B$  конечна. Кроме того, для порядков получаем неравенства

$$(A/B : 1) \leq ((A'/B')^* : 1) = (A'/B' : 1)$$

и

$$(A'/B' : 1) \leq ((A/B)^* : 1) = (A/B : 1).$$

Отсюда вытекает, что наше отображение  $\psi$  биективно и, следовательно, является изоморфизмом.

**Следствие.** Пусть  $A$  — конечная абелева группа,  $B$  — ее подгруппа,  $A^*$  — дуальная группа и  $B^\perp$  — множество всех  $\varphi \in A^*$ , таких, что  $\varphi(B) = 0$ . Тогда существует естественный изоморфизм между  $A^*/B^\perp$  и  $B^*$ .

**Доказательство.** Это частный случай теоремы 10.

## УПРАЖНЕНИЯ

- Показать, что каждая группа порядка  $\leq 5$  абелева.
- Показать, что существуют две неизоморфные группы порядка 4, а именно циклическая и произведение двух циклических групп порядка 2.

3. Пусть  $p$  — наименьшее простое число, делящее порядок конечной группы  $G$ ,  $H$  — подгруппа индекса  $p$ . Показать, что  $H$  нормальна в  $G$ .

4. Показать, что существуют ровно две неизоморфные неабелевы группы порядка 8. (Одна из них задается образующими  $\sigma$ ,  $\tau$  и соотношениями

$$\sigma^4 = 1, \quad \tau^2 = 1, \quad \tau\sigma\tau = \sigma^3.$$

Другая — группа кватернионов.)

5. Пусть  $G$  — группа и  $A$  — ее нормальная абелева подгруппа. Показать, что  $G/A$  действует на  $A$  посредством сопряжений, и таким путем получить гомоморфизм  $G/A$  в  $\text{Aut}(A)$ .

6. Показать, что каждая группа порядка 15 — циклическая.

7. Определить все группы порядка  $\leqslant 10$  с точностью до изоморфизма.

8. Группа  $G$  называется *периодической*, если для каждого  $x \in G$  существует целое число  $n \geqslant 1$ , для которого  $x^n = 1$ . Показать, что в категории периодических абелевых групп существуют бесконечные прямые произведения.

9. Пусть  $\sigma$  — перестановка конечного множества  $I$ , содержащего  $n$  элементов. Определим *знак*  $\epsilon(\sigma)$  перестановки  $\sigma$ , положив его равным  $(-1)^m$ , где

$$m = n - \text{число орбит } \sigma.$$

Если  $I_1, \dots, I_r$  — орбиты  $\sigma$ , то  $m$  также равно сумме

$$m = \sum_{v=1}^r [\text{card}(I_v) - 1].$$

Перестановка  $\tau$  множества  $I$  называется *транспозицией*, если в  $I$  существуют два таких элемента  $i \neq j$ , что  $\tau(i) = j$ ,  $\tau(j) = i$  и  $\tau(x) = x$  для всех  $x \in I$ ,  $x \neq i, j$ . Пусть  $\tau$  — транспозиция. Показать, что  $\epsilon(\sigma\tau) = -\epsilon(\sigma)$ , рассмотрев два случая, когда  $i, j$  лежат на одной и той же орбите перестановки  $\sigma$  или же на разных орбитах. В первом случае  $\sigma$  имеет орбиту на одну большую, а во втором случае — на одну меньшую. В частности, знак транспозиции равен  $-1$ .

10. Доказать по индукции, что транспозиции порождают группу перестановок множества  $I$  (называемую *симметрической группой* и обозначаемую часто через  $S_n$ ). Если  $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ , где  $\tau_i$  — транспозиции, то  $\epsilon(\sigma) = (-1)^m$ . Показать, что  $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ , где  $\sigma, \sigma'$  — любые две перестановки.

11. Пусть  $I$  — множество целых чисел  $(1, \dots, n)$ . Показать, что для любой перестановки  $\sigma$

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} [\sigma(j) - \sigma(i)] = \epsilon(\sigma) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j - i).$$

12. Пусть  $G$  — группа и  $H$  — ее подгруппа конечного индекса. Показать, что в  $G$  существует нормальная подгруппа  $N$ , содержащаяся в  $H$  и также имеющая конечный индекс. [Указание: если  $(G : H) = n$ , то найти гомоморфизм  $G$  в  $S_n$ , ядро которого содержится в  $H$ .]

13. Пусть  $f: A \rightarrow A'$  — гомоморфизм абелевых групп,  $B$  — подгруппа в  $A$ . Обозначим через  $A^f$  и  $A_f$  соответственно образ и ядро отображения  $f$  и аналогично определим  $B^f$  и  $B_f$ . Показать, что

$$(A : B) = (A^f : B^f)(A_f : B_f)$$

в том смысле, что если два из этих трех индексов конечны, то конечен и третий и выполняется написанное равенство.

14. Пусть  $G$  — конечная циклическая группа порядка  $n$ , порожденная элементом  $\sigma$ . Предположим, что  $G$  действует на абелевой группе  $A$ , и пусть  $f, g: A \rightarrow A$  — эндоморфизмы  $A$ , определяемые формулами

$$f(x) = \sigma x - x \quad \text{и} \quad g(x) = x + \sigma x + \cdots + \sigma^{n-1}x.$$

Определим *отношение Эрбрана*

$$q(A) = \frac{(A_f : A^g)}{(A_g : A^f)}$$

при условии, что оба индекса конечны. Предположим теперь, что  $B$  — подгруппа в  $A$ , для которой  $GB \subset B$ . (а) Определить естественным образом действие  $G$  на  $A/B$ . (б) Доказать, что

$$q(A) = q(B) q(A/B)$$

в том смысле, что если два из этих множителей конечны, то конечен и третий и выполняется написанное равенство. (в) Показать, что если  $A$  конечна, то  $q(A) = 1$ .

(Это упражнение — частный случай общей теории эйлеровых характеристик, рассматриваемой в гл. IV. После прочтения этой главы данное упражнение делается тривиальным. Почему?)

15. Пусть  $I$  — некоторое множество индексов. Предположим, что на  $I$  задано отношение частичного порядка, а именно для некоторых пар  $(i, j)$  выполнено соотношение  $i \leqslant j$ , удовлетворяющее следующим условиям. Для всех  $i, j, k \in I$  имеем:  $i \leqslant i$ ; если  $i \leqslant j$  и  $j \leqslant k$ , то  $i \leqslant k$ ; если  $i \leqslant j$  и  $j \leqslant i$ , то  $i = j$ . Мы говорим, что  $I$  — *направленное* множество, если для любых  $i, j \in I$  существует элемент  $k$ , такой, что  $i \leqslant k$  и  $j \leqslant k$ . Пусть  $I$  — направленное множество,  $\mathcal{A}$  — некоторая категория и  $\{A_i\}$  — семейство объектов из  $\mathcal{A}$ . Предположим, что для каждой пары  $i, j$  с условием  $i \leqslant j$  задан морфизм

$$f_j^i: A_i \rightarrow A_j,$$

такой, что  $f_k^j \circ f_j^i = f_k^i$  и  $f_i^i = \text{id}$ , каковы бы ни были  $i \leqslant j \leqslant k$ . *Прямой предел* семейства  $\{f_j^i\}$  — это универсальный объект в следующей категории  $\mathcal{C}$ .  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  состоит из пар  $(A, (f^i))$ , где  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  и  $(f^i)$  — семейство морфизмов  $f^i: A_i \rightarrow A$ ,  $i \in I$ , такое, что для всех  $i \leqslant j$  коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} & f_j^i & \\ A_i & \xrightarrow{\quad} & A_j \\ f_i^i \searrow & & \swarrow f_j^i \\ & A & \end{array}$$

(Универсальный означает, конечно, универсально отталкивающий.)

Показать, что в категории абелевых групп прямые пределы существуют. [Указание: профакторизовать прямую сумму по соотношениям, накладываемым отображениями  $f_j^i$ .]

16. Обращая стрелки в предыдущем упражнении, ввести понятие *обратного, или проективного, предела*. Доказать, что обратные пределы существуют в категории групп. [Указание: получить обратный предел как подгруппу произведения, состоящую из всех векторов  $(x_i)$ , которые удовлетворяют соотношениям согласования, налагаемым отображениями  $f_j^i$ .]

17. Пусть  $H, G, G'$  — группы и

$$f: H \rightarrow G, \quad g: H \rightarrow G'$$

— два гомоморфизма. Определить понятие копроизведения этих двух гомоморфизмов и показать, что оно существует.

18. Пусть  $A$  — периодическая абелева группа. Показать, что  $A$  — прямая сумма своих подгрупп  $A(p)$  по всем простым  $p$ .

19. Рассматривая  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{Q}$  как аддитивные группы, показать, что  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  — периодическая группа, которая имеет одну и только одну подгруппу порядка  $n$  для всякого целого  $n \geq 1$ , и что каждая такая подгруппа циклическая.

20. Показать, что если  $A$  — циклическая группа порядка  $n$  и  $d$  — положительное целое число,  $d \mid n$ , то  $A$  содержит ровно одну подгруппу порядка  $d$ , причем эта подгруппа циклическая.

21. Показать, что всякая конечная абелева группа, не являющаяся циклической, содержит подгруппу типа  $(p, p)$  для некоторого простого  $p$ .

22. Пусть  $G$  — циклическая группа порядка  $n$  и  $H$  — циклическая группа порядка  $m$ . Показать, что в случае взаимно простых  $m, n$  группа  $G \times H$  будет циклической (порядка  $mn$ ).