Всякое поле K имеет характеристику 0 или $p > 0$. В первом случае K содержит в качестве подполя изоморфный образ поля рациональных чисел, а во втором случае оно содержит изоморфный образ поля $\mathbf{F}_p$. В обоих случаях это подполе будет называться *простым полем* (содержащимся в K). Так как это простое поле является наименьшим подполем в K, содержащим 1 и не имеющим автоморфизмов, кроме тождественного, его обычно отождествляют с $\mathbf{Q}$ или $\mathbf{F}_p$, в зависимости от того, какой случай имеет место.

Под *простым кольцом* (в K) мы будем понимать либо кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$, если K имеет характеристику 0, либо $\mathbf{F}_p$, если K имеет характеристику p.

§ 3. Локализация

Мы продолжаем предполагать, что „кольцо" означает „коммутативное кольцо".

Пусть A — некоторое кольцо. Под *мультипликативным подмножеством* в A мы будем понимать подмоноид в кольце A (рассматриваемом как мультипликативный моноид согласно КО 2). Другими словами, это есть подмножество S, содержащее 1 и вместе с любыми двумя элементами x, y их произведение xy.

Мы построим сейчас *кольцо частных кольца A по S*, известное также под названием *кольца отношений кольца A по S*.

Рассмотрим пары (a, s), где $a \in A$ и $s \in S$. Определим отношение

$$(a, s) \sim (a', s')$$

между такими парами следующим условием: существует элемент $s_1 \in S$, для которого

$$s_1(s'a - sa') = 0.$$

Тривиально проверяется, что это будет отношение эквивалентности; класс эквивалентности, содержащий пару (a, s), обозначается через a/s. Множество классов эквивалентности обозначается символом $S^{-1}A$.

Отметим, что если $0 \in S$, то $S^{-1}A$ содержит ровно один элемент, а именно $0/1$.

Условием

$$(a/s)(a'/s) = aa'/ss'$$

в $S^{-1}A$ вводится умножение Тривиально проверяется, что это умножение правильно определено. Оно имеет единичный элемент, а именно $1/1$, и, очевидно, ассоциативно.

Сложение в $S^{-1}A$ задается посредством формулы

$$\frac{a}{s}+\frac{a'}{s'}=\frac{s'a+sa'}{ss'}.$$

Тривиально проверяется, что оно правильно определено. Для примера приведем подробное доказательство. Пусть $a_1/s_1=a/s$ и $a_1'/s_1'=a'/s'$. Мы должны показать, что

$$(s_1'a_1'+s_1a_1')/s_1s_1'=(s'a+sa')/ss'.$$

Существуют s_2, $s_3\in S$, для которых

$$s_2(sa_1-s_1a)=0,$$
$$s_3(s'a_1'-s_1'a')=0.$$

Умножим первое равенство на $s_3s's_1'$, а второе — на s_2ss_1, затем сложим их и получим

$$s_2s_3\left[s's_1'(sa_1-s_1a)+ss_1(s'a_1'-s_1'a')\right]=0$$

По определению это и есть то, что мы хотим показать; именно существует элемент из S (например, s_2s_3), который после умножения на

$$ss'(s_1'a_1+s_1a_1')-s_1s_1'(s'a+sa')$$

дает 0.

Заметим, что для данных $a\in A$ и s, $s'\in S$

$$a/s=s'a/s's.$$

Таким образом, это элементарное свойство дробей остается справедливым и в нашей более общей ситуации.

Наконец, так же тривиально проверяется, что два наши закона композиции определяют на $S^{-1}A$ структуру кольца.

Пусть

$$\varphi_S\colon A\to S^{-1}A$$

— отображение, при котором $\varphi(a)=a/1$. Сразу видно, что φ_S — гомоморфизм колец. Кроме того, всякий элемент из $\varphi_S(S)$ обратим в $S^{-1}A$ (обратным к $s/1$ служит $1/s$).

Пусть $\mathscr{C}$ — категория, объектами которой служат кольцевые гомоморфизмы

$$f\colon A\to B,$$

такие, что для всякого $s\in S$ элемент $f(s)$ обратим в B. Если $f\colon A\to B$ и $f'\colon A\to B'$ — два объекта в $\mathscr{C}$, то морфизм g из f в f' — это гомоморфизм

$$g\colon B\to B',$$

для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & B' & \end{tikzcd}$$

Мы утверждаем, что φ_S — *универсальный объект в этой категории* $\mathscr{C}$.

Доказательство. Предположим, что $a/s = a'/s'$, или, другими словами, что пары (a, s) и (a', s') эквивалентны. Найдется $s_1 \in S$, для которого

$$s_1(s'a - sa') = 0.$$

Пусть $f\colon A \to B$ — объект из $\mathscr{C}$. Тогда

$$f(s_1)[f(s')f(a) - f(s)f(a')] = 0.$$

Умножая на $f(s_1)^{-1}$, а затем на $f(s')^{-1}$ и $f(s)^{-1}$, получаем

$$f(a)f(s)^{-1} = f(a')f(s')^{-1}.$$

Следовательно, мы можем определить отображение

$$h\colon S^{-1}A \to B,$$

при котором $h(a/s) = f(a)f(s)^{-1}$ для всех $a/s \in S^{-1}A$. Тривиально проверяется, что h — гомоморфизм, приводящий к нужной коммутативной диаграмме. Тривиально проверяется также, что такой гомоморфизм h единствен и, следовательно, φ_S есть универсальный объект, что и требовалось доказать.

Пусть A — *целостное кольцо и* S — *мультипликативное подмножество, не содержащее* 0. *Тогда отображение*

$$\varphi_S\colon A \to S^{-1}A$$

инъективно.

Действительно, по определению равенство $a/1 = 0$ означает, что существует $s \in S$, для которого $sa = 0$ и, следовательно, $a = 0$.

Наиболее важными примерами мультипликативных множеств являются следующие.

(i) Пусть A — кольцо и S — множество обратимых элементов в A (т. е. множество единиц). Тогда S, очевидно, мультипликативно и обозначается, как мы отмечали, через A^*. Если A — поле, то A^* — мультипликативная группа отличных от нуля элементов в A. В этом случае $S^{-1}A$ совпадает просто с A.

(ii) Пусть A — целостное кольцо и S — множество всех его ненулевых элементов. Тогда S — мультипликативное множество и $S^{-1}A$ — поле, называемое *полем частных* или *полем отношений кольца* A.

Обычно A отождествляют с соответствующим подмножеством в $S^{-1}A$ и пишут

$$a/s = s^{-1}a,$$

$a \in A$, $s \in S$.

(iii) Кольцо A называется *локальным кольцом*, если оно имеет единственный максимальный идеал. Если A — локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал и $x \in A$, $x \notin \mathfrak{m}$, то элемент x обратим (иначе x порождал бы собственный идеал, не содержащийся в $\mathfrak{m}$, что невозможно). Пусть A — некоторое кольцо и $\mathfrak{p}$ — его простой идеал. Обозначим через S дополнение к $\mathfrak{p}$ в A. Тогда S — мультипликативное подмножество в A и $S^{-1}A$ обозначается символом $A_{\mathfrak{p}}$. Это локальное кольцо (см. упражнение 3); оно называется *локальным кольцом кольца A в $\mathfrak{p}$*.

Пусть A — кольцо и S — некоторое его мультипликативное подмножество. Обозначим через $J(A)$ множество всех идеалов в A. Мы можем определить отображение

$$\psi_S\colon J(A) \to J(S^{-1}A),$$

положив $\psi_S(\mathfrak{a}) = S^{-1}\mathfrak{a}$, где $S^{-1}\mathfrak{a}$ — подмножество в $S^{-1}A$, состоящее из всех дробей a/s с $a \in \mathfrak{a}$ и $s \in S$. Читатель легко проверит, что $S^{-1}\mathfrak{a}$ будет $S^{-1}A$-идеалом и что ψ_S *является гомоморфизмом как для* аддитивной, так и для мультипликативной структур моноида на множестве $J(A)$. Кроме того, ψ_S сохраняет также пересечения и включения; другими словами, для любых идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ из A мы имеем

$$S^{-1}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} + S^{-1}\mathfrak{b}, \quad S^{-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (S^{-1}\mathfrak{a})(S^{-1}\mathfrak{b}),$$
$$S^{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cap S^{-1}\mathfrak{b}.$$

Для примера докажем последнее соотношение. Пусть $x \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Тогда x/s лежит как в $S^{-1}\mathfrak{a}$, так и в $S^{-1}\mathfrak{b}$, так что включение левой части в правую тривиально. Обратно, пусть мы имеем элемент из $S^{-1}A$, который может быть записан в виде $a/s = b/s'$, где $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ и s, $s' \in S$. Тогда найдется элемент $s_1 \in S$, такой, что

$$s_1 s' a = s_1 s b,$$

и этот элемент лежит как в $\mathfrak{a}$, так и в $\mathfrak{b}$. Следовательно, элемент

$$a/s = s_1 s' a / s_1 s' s$$

лежит в $S^{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, что и требовалось доказать.