Глава III

Модули

§ 1. Основные определения

Пусть A — кольцо. *Левый модуль* над A, или левый A-модуль M, — это абелева группа, обычно (записываемая аддитивно, вместе с некоторым действием A на M при этом A рассматривается как мультипликативный моноид согласно КО 2), таким, что для всех a, $b \in A$ и x, $y \in M$ выполнены соотношения

$$(a+b)x = ax + bx \quad \text{и} \quad a(x+y) = ax + ay.$$

Мы предоставляем читателю доказать, что $a(-x) = -ax$ и что $0x = 0$. По определению действия $1x = x$.

Аналогичным образом определяют *правый* A-модуль. Мы будем иметь дело только с левыми A-модулями, если не оговорено противное, и поэтому будем называть их просто A-модулями или даже модулями, когда ясно, о каком кольце идет речь.

Примеры.

Отметим, что A есть модуль над собой.

Любая коммутативная группа является $\mathbf{Z}$-модулем.

Аддитивная группа, состоящая из одного 0, является модулем над любым кольцом.

Любой левый идеал в A есть модуль над A.

Пусть S — непустое множество и M — некоторый A-модуль. Множество отображений $\mathfrak{M}(S, M)$ будет $\mathbf{Z}$-модулем. Мы уже отмечали раньше, что это коммутативная группа. Если теперь $f \in \mathfrak{M}(S, M)$, $a \in A$, то считаем af отображением, для которого $(af)(s) = af(s)$. Аксиомы модуля проверяются тривиально.

В остальной части этого параграфа мы будем иметь дело с фиксированным кольцом A и, таким образом, можем опускать приставку A-.

Пусть M — модуль. Под *подмодулем* N в M мы понимаем такую аддитивную подгруппу, что $AN \subset N$. Очевидно, N есть модуль (с действием, индуцированным действием A на M).

Пусть $\mathfrak{a}$ — левый идеал и M — модуль. Множество $\mathfrak{a}M$ всех элементов

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$

где $a_i \in \mathfrak{a}$ и $x_i \in M$, будет, очевидно, подмодулем в M. Имеет место ассоциативность, а именно для любых левых идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}M) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})M.$$

Имеют место также некоторые очевидные соотношения дистрибутивности, например $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})M = \mathfrak{a}M + \mathfrak{b}M$. Если N и N' — подмодули в M, то $\mathfrak{a}(N+N') = \mathfrak{a}N + \mathfrak{a}N'$.

Пусть M—A-модуль и N—его подмодуль. Определим структуру модуля на факторгруппе M/N (для уже имеющейся структуры аддитивной группы). Пусть $x+N$ — некоторый смежный класс группы M по N, и пусть $a \in A$. Мы определяем $a(x+N)$ как смежный класс $ax+N$. Тривиально проверяется, что так введенное действие правильно определено (т. е. если y лежит в том же смежном классе, что и x, то ay лежит в том же смежном классе, что и ax) и что оно удовлетворяет всем необходимым условиям, так что M/N превращается в модуль, называемый *фактормодулем* модуля M по N.

Под *гомоморфизмом* модулей понимается отображение

$$f\colon M \to M'$$

одного модуля в другой (над тем же самым кольцом A), которое является гомоморфизмом аддитивных групп и для которого

$$f(ax) = af(x)$$

при всех $a \in A$ и $x \in M$. Ясно, что класс A-модулей образует категорию, морфизмами в которой служат гомоморфизмы модулей, обычно называемые просто гомоморфизмами, если это не приводит к путанице. Когда желают явно указать кольцо A, то говорят, что f является *A-гомоморфизмом*, или также, что *f — A-линейное отображение*.

Тождественное отображение всякого модуля на себя является гомоморфизмом. Для любого модуля M' отображение $\zeta\colon M \to M'$, такое, что $\zeta(x) = 0$ для всех $x \in M$, является гомоморфизмом, называемым *нулевым*.

Пусть M — модуль и N — его подмодуль. Тривиально проверяется, что канонический гомоморфизм аддитивных групп

$$f\colon M \to M/N$$

является также гомоморфизмом модулей. Столь же тривиально проверяется, что он универсален в категории гомоморфизмов модуля M, ядро которых содержит N.

Если $f\colon M \to M'$ — гомоморфизм модулей, то его ядро и образ являются подмодулями в M и M' соответственно (тривиальная проверка). Канонические гомоморфизмы, рассмотренные в гл. 1, § 4, переносятся с необходимыми изменениями и на модули. Для удобства читателя приведем сводку этих гомоморфизмов.

Пусть N, N' — два подмодуля модуля M. Тогда $N+N'$ будет также подмодулем и имеет место изоморфизм

$$N/N\cap N'\approx(N+N')/N'.$$

Если $M\supset M'\supset M''$ — модули, то

$$(M/M'')/(M'/M'')\approx M/M'.$$

Если $f\colon M\to M'$ — гомоморфизм модулей и N' — подмодуль в M', то $f^{-1}(N')$ есть подмодуль в M и имеет место канонический инъективный гомоморфизм

$$\bar{f}\colon M/f^{-1}(N')\to M'/N'.$$

Если гомоморфизм f сюръективен, то $\bar{f}$ — изоморфизм модулей.

Доказательства сводятся к проверке того, что все гомоморфизмы, с которыми мы имели дело, занимаясь абелевыми группами, являются теперь A-гомоморфизмами модулей. Эту проверку мы предоставляем читателю.

Отметим, что, как и в случае групп, гомоморфизм модулей, являющийся биективным отображением, будет изоморфизмом модулей. Здесь вновь доказательство то же, что и для групп (нужно только заметить, что обратное отображение, являющееся, как мы знаем, изоморфизмом групп, есть на самом деле изоморфизм модулей). Проверка снова предоставляется читателю.

Как и в случае абелевых групп, мы называем последовательность гомоморфизмов модулей

$$M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''$$

точной, если $\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker} g$. С подмодулем N модуля M ассоциируется точная последовательность

$$0\to N\to M\to M/N\to 0,$$

где отображение N в M есть включение, а последующее отображение — каноническое. Понятие точности принадлежит Эйленбергу — Стинроду.

§ 2. Группа гомоморфизмов

Пусть A — кольцо и X, X' — A-модули. Мы обозначаем через $\operatorname{Hom}_A(X', X)$ множество A-гомоморфизмов модуля X' в X. Тогда $\operatorname{Hom}_A(X', X)$ есть абелева группа, причем закон сложения — это закон сложения отображений в абелеву группу.

Если кольцо A коммутативно, то мы можем превратить $\operatorname{Hom}_A(X', X)$ в A-модуль, взяв в качестве af с $a\in A$ и $f\in\operatorname{Hom}_A(X', X)$ отображение, для которого

$$(af)(x)=af(x).$$