и их правого аналога, а именно

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2,$$

а также из того факта, что существует единичный элемент для композиции, именно id_M, мы заключаем, что $\mathrm{Hom}_A(M, M)$ есть кольцо, умножением в котором служит композиция отображений. Если n—целое число $\geqslant 1$, то мы можем писать f^n для обозначения n-кратной итерации f и можем определить f^0 как id. Согласно общему определению эндоморфизмов в категории, мы можем также писать $\mathrm{End}_A M$ вместо $\mathrm{Hom}_A(M, M)$.

Так как A-модуль M—абелева группа, то $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, M)$ (=множеству групповых гомоморфизмов M в себя) есть кольцо и мы могли бы определить действие A на M как кольцевой гомоморфизм $A \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, M)$.

§ 3. *Прямые произведения и суммы модулей*

Пусть A — кольцо. Как и в случае абелевых групп, копроизведение в категории A-модулей называется прямой суммой.

Предложение 1. *Прямые произведения и прямые суммы в категории A-модулей существуют.*

Доказательство. Доказательство в случае произведения мы предоставляем читателю в качестве упражнения. В качестве образца мы рассмотрим случай суммы, следуя конструкции, данной для прямой суммы абелевых групп. Пусть $\{M_i\}_{i \in I}$ — семейство A-модулей и

$$M = \coprod_{i \in I} M_i$$

— их прямая сумма как абелевых групп. Определим на M структуру A-модуля. Если $(x_i)_{i \in I}$ — элемент из M, т. е. такое семейство элементов $x_i \in M_i$, что $x_i = 0$ для почти всех i, и если $a \in A$, то положим

$$a(x_i)_{i \in I} = (ax_i)_{i \in I},$$

задавая тем самым умножение на a покомпонентно. Тривиально проверяется, что это есть действие A на M, превращающее M в A-модуль. Если читатель обратится теперь к данному ранее доказательству существования прямых сумм в категории абелевых групп, то он сразу увидит, что его можно продолжить в том же плане, с тем чтобы показать, что M есть прямая сумма семейства $\{M_i\}_{i \in I}$ как A-модулей (например, отображение

$$\lambda_j\colon M_j \to M,$$

для которого $\lambda_j(x)$ имеет j-ю компоненту, равную x, и i-ю компоненту, равную 0, при $i \neq j$, теперь, как легко видеть, будет A-гомоморфизмом). Для данного семейства A-гомоморфизмов $\{f_i\colon M_i \to N\}$ отображение f, определенное в доказательстве для абелевых групп, является также A-гомоморфизмом и обладает всеми необходимыми свойствами.

В случае когда I—конечное множество, имеется полезный критерий представимости модуля в виде прямого произведения.

Предложение 2. *Пусть M—A-модуль и n—целое число $\geqslant 1$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ пусть $\varphi_i\colon M \to M$ — A-гомоморфизм, такой, что*

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \mathrm{id} \quad \text{и} \quad \varphi_i \circ \varphi_j = 0 \ \text{для}\ i \neq j.$$

Тогда $\varphi_i^2 = \varphi_i$ для всех i. Положим $M_i = \varphi_i(M)$ и возьмем отображение $\varphi\colon M \to \prod M_i$, для которого

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)).$$

Тогда φ будет A-изоморфизмом M на прямое произведение $\prod M_i$.

Доказательство. Для каждого j имеем

$$\varphi_j = \varphi_j \circ \mathrm{id} = \varphi_j \circ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_j = \varphi_j^2,$$

что доказывает первое утверждение. Ясно, что φ — A-гомоморфизм. Пусть x лежит в его ядре. Так как

$$x = \mathrm{id}(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x),$$

то мы заключаем, что $x = 0$, так что φ инъективно. Пусть для каждого $i = 1, \ldots, n$ заданы элементы $y_i \in M_i$. Положим $x = y_1 + \ldots + y_n$. Очевидно, $\varphi_j(y_i) = 0$ при $i \neq j$. Следовательно,

$$\varphi_j(x) = y_j$$

для каждого $j = 1, \ldots, n$. Это доказывает, что φ сюръективно, и завершает доказательство нашего предложения.

Заметим, что в том случае, когда I — конечное множество, прямая сумма и прямое произведение совпадают.

Как и в случае абелевых групп, для обозначения прямой суммы мы используем символ $\oplus$.

Пусть M — модуль над кольцом A и S — подмножество в M. Под *линейной комбинацией* элементов из S (с коэффициентами в A) понимают сумму

$$\sum_{x \in S} a_x x,$$

где $\{a_x\}$ — некоторое множество элементов из A, почти все из которых равны 0. Эти элементы a_x называются *коэффициентами* линейной комбинации. Пусть N — множество всех линейных комбинаций элементов из S. Тогда N — подмодуль в M, так как если

$$\sum_{x \in S} a_x x \quad \text{и} \quad \sum_{x \in S} b_x x$$

— две линейные комбинации, то их сумма равна

$$\sum_{x \in S} (a_x + b_x) x,$$

а если $c \in A$, то

$$c\left(\sum_{x \in S} a_x x\right) = \sum_{x \in S} c a_x x,$$

и эти элементы снова являются линейными комбинациями элементов из S. Мы будем называть N подмодулем, *порожденным* S, а S — множеством *образующих* для N. Иногда мы будем писать $N = A\langle S\rangle$. Если S состоит из одного элемента x, то модуль, порожденный x, записывается также в виде Ax или просто (x), и иногда мы будем говорить, что (x) есть *главный модуль*.

Модуль M называется *конечно порожденным*, или модулем *конечного типа*, если он имеет конечное число образующих.

Подмножество S модуля M называется *линейно независимым* (над A), если из равенства нулю линейной комбинации

$$\sum_{x \in S} a_x x$$

обязательно вытекает, что $a_x = 0$ для всех $x \in S$. Если S линейно независимо и если две линейные комбинации

$$\sum a_x x \quad \text{и} \quad \sum b_x x$$

равны, то $a_x = b_x$ для всех $x \in S$. Действительно, вычитание одной линейной комбинации из другой дает $\sum (a_x - b_x) x = 0$, откуда $a_x - b_x = 0$ для всех x. Если подмножество S линейно независимо, то мы будем также говорить, что его элементы линейно независимы. Аналогично *семейство* $\{x_i\}_{i \in I}$ элементов из M называется линейно независимым, если, какова бы ни была линейная комбинация

$$\sum_{i \in I} a_i x_i = 0,$$

$a_i = 0$ для всех i. Подмножество S (соответственно семейство $\{x_i\}$) называется *линейно зависимым*, если оно не является линейно независимым, т. е. если существует соотношение

$$\sum_{x \in S} a_x x = 0 \quad \left(\text{соответственно } \sum_{i \in I} a_i x_i = 0\right),$$

в котором не все a_x (соответственно a_i) $= 0$.

Предостережение. Пусть x — какой-нибудь элемент из M, являющийся линейно независимым. Тогда семейство $\{x_i\}_{i=1, \ldots, n}$, в котором $x_i = x$ для всех i, линейно зависимо, если $n > 1$, но множество, состоящее из самого x, линейно независимо.

Пусть M — A-модуль и $\{M_i\}_{i \in I}$ — некоторое семейство его подмодулей Имея гомоморфизмы включения

$$\lambda_i\colon M_i \to M,$$

получаем индуцированный гомоморфизм

$$\lambda_*\colon \prod M_i \to M,$$

такой, что для любого семейства элементов $(x_i)_{i \in I}$, среди которых все, кроме конечного числа, равны 0,

$$\lambda_*((x_i)) = \sum_{i \in I} x_i.$$

Если λ_* — изоморфизм, то мы говорим, что семейство $\{M_i\}_{i \in I}$ *есть разложение M в прямую сумму.* Это, очевидно, равносильно тому, что всякий элемент из M имеет единственное представление в виде суммы

$$\sum x_i,$$

где $x_i \in M_i$ и почти все $x_i = 0$ Допуская неточность в обозначениях, мы в этом случае будем также писать

$$M = \prod M_i.$$

Если семейство $\{M_i\}$ таково, что всякий элемент из M допускает *какое-то* представление в виде суммы $\sum x_i$ (не обязательно единственное), то мы будем писать $M = \sum M_i$. В общем случае, если $\{M_i\}$ — произвольное семейство подмодулей, то образ определенного выше гомоморфизма λ_* есть подмодуль в M, который будет обозначаться через $\sum M_i$.

Если M — модуль и N, N' — два таких его подмодуля, что $N + N' = M$ и $N \cap N' = 0$, то имеет место изоморфизм модулей

$$M \approx N \oplus N',$$

точно так же как и в случае абелевых групп, и аналогично для конечного числа подмодулей

Отметим, что наше изложение теории абелевых групп есть, разумеется, частный случай теории модулей просто потому, что абелевы группы можно рассматривать как модули над $\mathbf{Z}$ Однако обычно представляется желательным (хотя это и непроизводительно) получать сначала некоторые результаты для абелевых групп, а затем указывать,

что они, вообще говоря, справедливы (очевидным образом) и для модулей.

Пусть M, M', N — модули. Тогда имеет место изоморфизм абелевых групп

$$\boxed{\mathrm{Hom}_A(M \oplus M', N) \xleftrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_A(M, N) \times \mathrm{Hom}_A(M', N)}$$

и аналогично

$$\boxed{\mathrm{Hom}_A(N, M \times M') \xleftrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_A(N, M) \oplus \mathrm{Hom}_A(N, M')}.$$

Первый из изоморфизмов получается следующим образом. Если $f\colon M \oplus M' \to N$ — гомоморфизм, то f индуцирует гомоморфизмы $f_1\colon M \to N$ и $f_2\colon M' \to N$ посредством композиции с вложениями соответственно M и M' в их прямую сумму

$$M \to M \oplus \{0\} \subset M \oplus M' \xrightarrow{f} N,$$

$$M' \to \{0\} \oplus \{M'\} \subset M \oplus M' \xrightarrow{f} N.$$

Мы предоставляем читателю проверить, что сопоставление

$$f \longmapsto (f_1, f_2)$$

и дает изоморфизм, указанный в первой рамке. Изоморфизм во второй рамке получается аналогичным способом. Если даны гомоморфизмы $f_1\colon N \to M$ и $f_2\colon N \to M'$, то имеет место гомоморфизм $f\colon N \to M \times M'$, определяемый формулой

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

Тривиально проверяется, что сопоставление

$$(f_1, f_2) \longmapsto f$$

дает изоморфизм, указанный во второй рамке.

Конечно, прямая сумма и прямое произведение двух модулей изоморфны, но мы различаем их в обозначениях из соображений функториальности.

Предложение 3. *Пусть* $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ — *точная последовательность модулей. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *Существует гомоморфизм* $\varphi\colon M'' \to M$, *такой, что* $g \circ \varphi = \mathrm{id}$.

(2) *Существует гомоморфизм* $\psi\colon M \to M'$, *такой, что* $\psi \circ f = \mathrm{id}$. *При выполнении этих условий имеют место изоморфизмы*

$$M = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, \psi, \quad M = \mathrm{Ker}\, g \oplus \mathrm{Im}\, \varphi,$$

$$M \approx M' \oplus M''.$$

Доказательство. Выпишем гомоморфизмы из правой части последовательности

$$M \underset{\varphi}{\overset{g}{\rightleftarrows}} M'' \to 0.$$

Пусть $x \in M$. Тогда разность

$$x - \varphi(g(x))$$

лежит в ядре g и, следовательно, $M = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} \varphi$.

Эта сумма прямая, так как если

$$x = y + z,$$

где $y \in \operatorname{Ker} g$ и $z \in \operatorname{Im} \varphi$, то $z = \varphi(w)$; здесь $w \in M''$, и, применяя g, получаем, что $w = g(x)$. Таким образом, w однозначно определен элементом x, а потому z однозначно определен элементом x. Следовательно, то же справедливо и для y; тем самым доказано, что сумма прямая.

Рассуждения, относящиеся к другой части последовательности, аналогичны, и проведение их предоставляется читателю в качестве упражнения, равно как и доказательство эквивалентности обоих условий. В случае когда эти условия удовлетворяются, говорят, что точная последовательность из предложения 3 *расщепляется*.

§ 4. Свободные модули

Пусть M — модуль над кольцом A и S — подмножество в M. Мы будем говорить, что S — *базис модуля* M, если S не пусто, порождает M и линейно независимо. В частности, если S — базис M, то $M \neq \{0\}$ при условии, что $A \neq \{0\}$, и всякий элемент из M имеет единственное представление в виде линейной комбинации элементов из S. Аналогично мы говорим, что непустое семейство $\{x_i\}_{i \in I}$ элементов из M образует *базис* в M, если оно линейно независимо и порождает M.

Всякое кольцо, рассматриваемое как модуль над собой, обладает базисом, состоящим из единичного элемента 1.

Пусть I — непустое множество, и для каждого $i \in I$ пусть $A_i = A$, причем все A_i рассматриваются как A-модули. Положим

$$F = \prod_{i \in I} A_i.$$

Модуль F обладает базисом, состоящим из элементов e_i в F, i-й компонентой которых является единичный элемент из A_i, а все другие компоненты равны 0.

Под *свободным* модулем мы будем понимать модуль, обладающий базисом, или же нулевой модуль.