Доказательство. Выпишем гомоморфизмы из правой части последовательности

$$M \underset{\varphi}{\overset{g}{\rightleftarrows}} M'' \to 0.$$

Пусть $x \in M$. Тогда разность

$$x - \varphi(g(x))$$

лежит в ядре g и, следовательно, $M = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} \varphi$.

Эта сумма прямая, так как если

$$x = y + z,$$

где $y \in \operatorname{Ker} g$ и $z \in \operatorname{Im} \varphi$, то $z = \varphi(w)$; здесь $w \in M''$, и, применяя g, получаем, что $w = g(x)$. Таким образом, w однозначно определен элементом x, а потому z однозначно определен элементом x. Следовательно, то же справедливо и для y; тем самым доказано, что сумма прямая.

Рассуждения, относящиеся к другой части последовательности, аналогичны, и проведение их предоставляется читателю в качестве упражнения, равно как и доказательство эквивалентности обоих условий. В случае когда эти условия удовлетворяются, говорят, что точная последовательность из предложения 3 *расщепляется*.

§ 4. Свободные модули

Пусть M — модуль над кольцом A и S — подмножество в M. Мы будем говорить, что S — *базис модуля* M, если S не пусто, порождает M и линейно независимо. В частности, если S — базис M, то $M \neq \{0\}$ при условии, что $A \neq \{0\}$, и всякий элемент из M имеет единственное представление в виде линейной комбинации элементов из S. Аналогично мы говорим, что непустое семейство $\{x_i\}_{i \in I}$ элементов из M образует *базис* в M, если оно линейно независимо и порождает M.

Всякое кольцо, рассматриваемое как модуль над собой, обладает базисом, состоящим из единичного элемента 1.

Пусть I — непустое множество, и для каждого $i \in I$ пусть $A_i = A$, причем все A_i рассматриваются как A-модули. Положим

$$F = \prod_{i \in I} A_i.$$

Модуль F обладает базисом, состоящим из элементов e_i в F, i-й компонентой которых является единичный элемент из A_i, а все другие компоненты равны 0.

Под *свободным* модулем мы будем понимать модуль, обладающий базисом, или же нулевой модуль.

Теорема 1. *Пусть A — кольцо и M — модуль над A с базисом $\{x_i\}_{i\in I}$, где I — непустое множество. Пусть, далее, N есть A-модуль и $\{y_i\}_{i\in I}$ — семейство элементов в N. Тогда существует единственный гомоморфизм f: $M \to N$, такой, что $f(x_i) = y_i$ для всех i.*

Доказательство. Пусть x — некоторый элемент из M. Существует единственное семейство $\{a_i\}_{i\in I}$ элементов из A, для которого

$$x = \sum_{i\in I} a_i x_i.$$

Положим

$$f(x) = \sum a_i y_i.$$

Ясно, что f — гомоморфизм, удовлетворяющий нашим требованиям, и что это единственный такой гомоморфизм, так как мы должны иметь

$$f(x) = \sum a_i f(x_i).$$

Следствие 1. *В обозначениях теоремы предположим, что $\{y_i\}_{i\in I}$ — базис в N. Тогда гомоморфизм f является изоморфизмом (модулей).*

Доказательство. В силу симметрии существует единственный гомоморфизм

$$g\colon N \to M,$$

такой, что $g(y_i) = x_i$ для всех i и $f \circ g$ и $g \circ f$ являются соответствующими тождественными отображениями.

Следствие 2. *Два модуля, имеющие базисы одинаковой мощности, изоморфны.*

Доказательство. Очевидно.

Доказательства следующих утверждений предоставляем читателю в качестве упражнений.

Пусть M — свободный модуль над A с базисом $\{x_i\}_{i\in I}$, так что

$$M = \coprod_{i\in I} Ax_i.$$

Пусть $\mathfrak{a}$ — левый идеал в A. Тогда $\mathfrak{a}M$ будет подмодулем в M. Далее, $\mathfrak{a}x_i$ — подмодуль в Ax_i для каждого i. *Имеет место изоморфизм* (A-модулей)

$$\boxed{M/\mathfrak{a}M \approx \coprod_{i\in I} Ax_i/\mathfrak{a}x_i}.$$

Кроме того, $Ax_i/\mathfrak{a}x_i$ и $A/\mathfrak{a}$ изоморфны как A-модули.

Предположим дополнительно, что A коммутативно. Тогда $A/\mathfrak{a}$ — кольцо. Кроме того, $M/\mathfrak{a}M$ есть свободный модуль над $A/\mathfrak{a}$ и каждый фактормодуль $Ax_i/\mathfrak{a}x_i$ свободен над $A/\mathfrak{a}$. Если $\bar{x}_i$ — образ x_i при каноническом гомоморфизме

$$Ax_i \to Ax_i/\mathfrak{a}x_i,$$

то $\bar{x}_i$ служит базисом (состоящим из одного элемента) для $Ax_i/\mathfrak{a}x_i$ над $A/\mathfrak{a}$.

§ 5. Векторные пространства

Модуль над полем называется *векторным пространством.*

Теорема 2. *Пусть V — векторное пространство над полем K, причем $V \neq \{0\}$. Пусть Γ — множество образующих для V над K и S — некоторое линейно независимое подмножество в Γ. Тогда в V существует базис $\mathscr{B}$, такой, что $S \subset \mathscr{B} \subset \Gamma$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{T}$ — множество, элементами которого служат подмножества T из Γ, содержащие S и линейно независимые. Тогда $\mathfrak{T}$ не пусто (оно содержит S). Мы утверждаем, что $\mathfrak{T}$ индуктивно упорядочено. Действительно, если $\{T_i\}$ — совершенно упорядоченное подмножество в T (упорядоченность по включению), то подмножество $\bigcup T_i$ также линейно независимо и содержит S. Пусть $\mathscr{B}$ — максимальный элемент в $\mathfrak{T}$, существующий по лемме Цорна. Тогда $\mathscr{B}$ линейно независимо. Пусть W — подпространство в V, порожденное $\mathscr{B}$. Если $W \neq V$, то существует некоторый элемент $x \in \Gamma$, такой, что $x \notin W$. Тогда $\mathscr{B} \cup \{x\}$ линейно независимо. Действительно, если

$$\sum_{y \in \mathscr{B}} a_y y + bx = 0, \quad a_y,\ b \in K,$$

то мы должны иметь $b = 0$, потому что иначе

$$x = -\sum_{y \in \mathscr{B}} b^{-1} a_y y \in W.$$

Так как в свою очередь $\mathscr{B}$ линейно независимо, то $a_y = 0$ для всех $y \in \mathscr{B}$; это и доказывает, что $\mathscr{B} \cup \{x\}$ линейно независимо вопреки максимальности $\mathscr{B}$. Отсюда следует, что $W = V$ и, кроме того, что $\mathscr{B}$ непусто, так как $V \neq \{0\}$. Теорема доказана.

В частности, мы видим, что если V—векторное пространство $\neq \{0\}$, то всякое множество линейно независимых элементов может быть расширено до базиса, при этом базис может быть выбран из любого данного множества образующих.