Предположим дополнительно, что A коммутативно. Тогда $A/\mathfrak{a}$ — кольцо. Кроме того, $M/\mathfrak{a}M$ есть свободный модуль над $A/\mathfrak{a}$ и каждый фактормодуль $Ax_i/\mathfrak{a}x_i$ свободен над $A/\mathfrak{a}$. Если $\bar{x}_i$ — образ x_i при каноническом гомоморфизме

$$Ax_i \to Ax_i/\mathfrak{a}x_i,$$

то $\bar{x}_i$ служит базисом (состоящим из одного элемента) для $Ax_i/\mathfrak{a}x_i$ над $A/\mathfrak{a}$.

§ 5. Векторные пространства

Модуль над полем называется *векторным пространством.*

Теорема 2. *Пусть V — векторное пространство над полем K, причем $V \neq \{0\}$. Пусть Γ — множество образующих для V над K и S — некоторое линейно независимое подмножество в Γ. Тогда в V существует базис $\mathscr{B}$, такой, что $S \subset \mathscr{B} \subset \Gamma$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{T}$ — множество, элементами которого служат подмножества T из Γ, содержащие S и линейно независимые. Тогда $\mathfrak{T}$ не пусто (оно содержит S). Мы утверждаем, что $\mathfrak{T}$ индуктивно упорядочено. Действительно, если $\{T_i\}$ — совершенно упорядоченное подмножество в T (упорядоченность по включению), то подмножество $\bigcup T_i$ также линейно независимо и содержит S. Пусть $\mathscr{B}$ — максимальный элемент в $\mathfrak{T}$, существующий по лемме Цорна. Тогда $\mathscr{B}$ линейно независимо. Пусть W — подпространство в V, порожденное $\mathscr{B}$. Если $W \neq V$, то существует некоторый элемент $x \in \Gamma$, такой, что $x \notin W$. Тогда $\mathscr{B} \cup \{x\}$ линейно независимо. Действительно, если

$$\sum_{y \in \mathscr{B}} a_y y + bx = 0, \quad a_y,\ b \in K,$$

то мы должны иметь $b = 0$, потому что иначе

$$x = -\sum_{y \in \mathscr{B}} b^{-1} a_y y \in W.$$

Так как в свою очередь $\mathscr{B}$ линейно независимо, то $a_y = 0$ для всех $y \in \mathscr{B}$; это и доказывает, что $\mathscr{B} \cup \{x\}$ линейно независимо вопреки максимальности $\mathscr{B}$. Отсюда следует, что $W = V$ и, кроме того, что $\mathscr{B}$ непусто, так как $V \neq \{0\}$. Теорема доказана.

В частности, мы видим, что если V—векторное пространство $\neq \{0\}$, то всякое множество линейно независимых элементов может быть расширено до базиса, при этом базис может быть выбран из любого данного множества образующих.

Теорема 3. *Пусть V — векторное пространство над полем K. Тогда любые два базиса V над K имеют одинаковую мощность.*

Доказательство. Предположим сначала, что в V существует базис из конечного числа элементов, скажем $\{v_1, \ldots, v_m\}$, $m \geqslant 1$. Докажем, что любой другой базис должен также состоять из m элементов. Для этого достаточно доказать следующее: если $w_1, \ldots, w_n$ — элементы из V, линейно независимые над K, то $n \leqslant m$ (так как затем мы можем использовать симметрию). Доказываем по индукции. В K существуют элементы $c_1, \ldots, c_m$, для которых

$$w_1 = c_1 v_1 + \ldots + c_m v_m, \tag{1}$$

причем хотя бы один из них, скажем c_1, отличен от 0. Тогда v_1 лежит в подпространстве, порожденном над K элементами w_1, $v_2, \ldots, v_m$, и, следовательно, это подпространство совпадает с V. Кроме того, $w_1, v_2, \ldots, v_m$ линейно независимы. Действительно, предположим, что $b_1, \ldots, b_m$ — такие элементы из K, что

$$b_1 w_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_m v_m = 0.$$

Если $b_1 \neq 0$, то разделим это равенство на b_1 и выразим w_1 в виде линейной комбинации элементов $v_2, \ldots, v_m$. Вычитание ее из (1) дало бы тогда соотношение линейной зависимости между v_i, что невозможно. Следовательно, $b_1 = 0$, а тогда и все $b_i = 0$, так как v_i линейно независимы.

Предположим по индукции, что после подходящей перенумерации v_i мы нашли $w_1, \ldots, w_r$ $(r < n)$, для которых совокупность

$$\{w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_m\}$$

будет базисом в V. Представим w_{r+1} в виде линейной комбинации

$$w_{r+1} = c_1 w_1 + \ldots + c_r w_r + c_{r+1} v_{r+1} + \ldots + c_m v_m, \tag{2}$$

где $c_i \in K$. Коэффициенты при v_i в этом соотношении не все равны нулю, так как иначе существовала бы линейная зависимость между w_i. Скажем, $c_{r+1} \neq 0$. Применяя рассуждение, аналогичное использованному выше, мы можем заменить v_{r+1} на w_{r+1} и вновь получить базис V. Это означает, что мы можем повторять эту процедуру до тех пор, пока не станет $r = n$, а потому $n \leqslant m$, что и доказывает нашу теорему.

Общий случай бесконечного базиса мы предоставляем в качестве упражнения читателю. [*Указание*: использовать тот факт, что любое конечное число элементов одного базиса содержится в пространстве, порожденном конечным числом элементов другого базиса.]

Если векторное пространство V обладает базисом из конечного числа элементов, скажем из m, то мы будем говорить, что V ко-

нечномерно и что m — его *размерность*. В силу теоремы 3 мы видим, что m есть число элементов *любого* базиса V. Если $V=\{0\}$, то мы полагаем его размерность равной 0 и говорим, что V 0-мерно. Сокращенно размерность обозначается через „dim“ или „$\dim_K$“, если для ясности необходима ссылка на поле K.

Имея дело с векторными пространствами, мы употребляем слова подпространство и факторпространство вместо подмодуль и фактормодуль.

Теорема 4. *Пусть V — векторное пространство над полем K, W — его подпространство. Тогда*

$$\dim_K V = \dim_K W + \dim_K V/W.$$

Если $f\colon V \to U$ — гомоморфизм векторных пространств над K, то

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Доказательство. Первое утверждение является частным случаем второго, когда в качестве f взято каноническое отображение. Пусть $\{u_i\}_{i\in I}$ — базис в $\operatorname{Im} f$ и $\{w_j\}_{j\in J}$ — базис в $\operatorname{Ker} f$. Возьмем семейство элементов $\{v_i\}_{i\in I}$ из V, такое, что $f(v_i)=u_i$ для каждого $i\in I$. Мы утверждаем, что

$$\{v_i,\ w_j\}_{i\in I,\ j\in J}$$

будет базисом для V. Этим, очевидно, завершается доказательство нашего утверждения.

Пусть x — элемент из V. Тогда существуют элементы $\{a_i\}_{i\in I}$ в K, почти все равные 0 и такие, что

$$f(x)=\sum_{i\in I} a_i u_i.$$

Следовательно, $f\left(x-\sum a_i v_i\right)=f(x)-\sum a_i f(v_i)=0$. Значит,

$$x-\sum a_i v_i$$

лежит в ядре f, а потому существуют элементы $\{b_j\}_{j\in J}$ в K, почти все равные 0 и такие, что

$$x-\sum a_i v_i=\sum b_j w_j.$$

Отсюда находим, что $x=\sum a_i v_i+\sum b_j w_j$, т. е. $\{v_i,\ w_j\}$ порождает V. Остается показать, что семейство $\{v_i,\ w_j\}$ линейно независимо. Предположим, что существуют элементы c_i, d_j, такие, что

$$0=\sum c_i v_i+\sum d_j w_j.$$

Применяя f, получаем

$$0=\sum c_i f(v_i)=\sum c_i u_i,$$

откуда все $c_i=0$. Отсюда тотчас заключаем, что все $d_j=0$ и, следовательно, наше семейство $\{v_i, w_j\}$ является базисом для V над K, что и требовалось показать.

Следствие. *Пусть V — векторное пространство и W — его подпространство. Тогда*

$$\dim W \leqslant \dim V.$$

Если V конечномерно и $\dim W=\dim V$, то $W=V$.

Доказательство. Очевидно.

§ 6. Дуальное пространство

Пусть V — векторное пространство над полем K. Будем рассматривать K как 1-мерное пространство над собой. Под *дуальным пространством* V^* к V мы будем понимать пространство $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ [1]). Его элементы называются *функционалами*. Таким образом, функционал на V — это K-линейное отображение $f\colon V\to K$. Если $x\in V$ и $f\in V^*$, то $f(x)$ иногда обозначают через $\langle x, f\rangle$. Фиксируя x, мы видим, что выражение $\langle x, f\rangle$, рассматриваемое как функция от $f\in V^*$, K-линейно по своему второму аргументу и, таким образом, x индуцирует линейный функционал на V^*, равный 0 в том и только в том случае, если $x=0$. Следовательно, мы получаем вложение $V\to V^{**}$, которое не всегда сюръективно.

Пусть $\{x_i\}_{i\in I}$ — базис в V. Для каждого $i\in I$ обозначим через f_i однозначно определенный функционал, для которого $f_i(x_j)=\delta_{ij}$ (другими словами, $f_i(x_j)=1$, если $i=j$, и $=0$, если $i\neq j$). Такое линейное отображение существует в силу общих свойств базисов (теорема 1 из § 4).

Теорема 5. *Пусть V — векторное пространство конечной размерности n над полем K. Тогда $\dim V^*=n$. Если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис для V и f_i — функционал, для которого $f_i(x_j)=\delta_{ij}$, то $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — базис для V^*.*

Доказательство. Пусть $f\in V^*$, и пусть $a_i=f(x_i)$ $(i=1, \ldots, n)$. Имеем

$$(a_1f_1+\ldots+a_nf_n)(x_i)=a_1f_1(x_i)+\ldots+a_nf_n(x_i)=a_i.$$

---

[1]) В русской литературе чаще употребляется термин „*сопряженное* пространство“. — *Прим. ред.*