Применяя f, получаем

$$0 = \sum c_i f(v_i) = \sum c_i u_i,$$

откуда все $c_i = 0$. Отсюда тотчас заключаем, что все $d_j = 0$ и, следовательно, наше семейство $\{v_i, w_j\}$ является базисом для V над K, что и требовалось показать.

Следствие. *Пусть V — векторное пространство и W — его подпространство. Тогда*

$$\dim W \leqslant \dim V.$$

Если V конечномерно и $\dim W = \dim V$, то $W = V$.

Доказательство. Очевидно.

§ 6. Дуальное пространство

Пусть V — векторное пространство над полем K. Будем рассматривать K как 1-мерное пространство над собой. Под *дуальным пространством* V^* к V мы будем понимать пространство $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ [1]). Его элементы называются *функционалами*. Таким образом, функционал на V — это K-линейное отображение $f\colon V \to K$. Если $x \in V$ и $f \in V^*$, то $f(x)$ иногда обозначают через $\langle x, f\rangle$. Фиксируя x, мы видим, что выражение $\langle x, f\rangle$, рассматриваемое как функция от $f \in V^*$, K-линейно по своему второму аргументу и, таким образом, x индуцирует линейный функционал на V^*, равный 0 в том и только в том случае, если $x = 0$. Следовательно, мы получаем вложение $V \to V^{**}$, которое не всегда сюръективно.

Пусть $\{x_i\}_{i \in I}$ — базис в V. Для каждого $i \in I$ обозначим через f_i однозначно определенный функционал, для которого $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ (другими словами, $f_i(x_j) = 1$, если $i = j$, и $= 0$, если $i \neq j$). Такое линейное отображение существует в силу общих свойств базисов (теорема 1 из § 4).

Теорема 5. *Пусть V — векторное пространство конечной размерности n над полем K. Тогда $\dim V^* = n$. Если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис для V и f_i — функционал, для которого $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, то $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — базис для V^*.*

Доказательство. Пусть $f \in V^*$, и пусть $a_i = f(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Имеем

$$(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n)(x_i) = a_1 f_1(x_i) + \ldots + a_n f_n(x_i) = a_i.$$

[1]) В русской литературе чаще употребляется термин „*сопряженное* пространство". — *Прим. ред.*

Следовательно, $f = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$, и мы видим, что f_i порождают V^*. Кроме того, они линейно независимы, так как если

$$a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0$$

с $a_i \in K$, то, беря значение левой части на x_i, получаем

$$a_i f_i(x_i) = 0,$$

откуда $a_i = 0$ для всех i. Это доказывает нашу теорему.

Следствие. *Если пространство V конечномерно, то отображение $V \to V^{**}$, сопоставляющее каждому $x \in V$ функционал $f \mapsto \langle x, f\rangle$ на V^*, является изоморфизмом V на V^{**}.*

Доказательство. Это отображение — инъективный гомоморфизм. Поэтому его образ будет подпространством в V^{**} размерности n и, следовательно, должен совпадать со всем V^{**}.

Для данного базиса $\{x_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ базис $\{f_i\}$, определенный в формулировке теоремы, называется *дуальным базисом*. Пользуясь этими базисами, мы можем представить любой элемент A из V посредством координат $(a_1, \ldots, a_n)$ и любой элемент B из V^* посредством координат $(b_1, \ldots, b_n)$, так что

$$A = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n, \qquad B = b_1 f_1 + \ldots + b_n f_n.$$

Отсюда мы видим, что

$$\langle A, B\rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = A \cdot B$$

есть обычное скалярное произведение наборов из n чисел.

Пусть V — векторное пространство над полем K, и пусть

$$0 \to W \xrightarrow{\lambda} V \xrightarrow{\varphi} U \to 0$$

— точная последовательность K-линейных отображений. Мы утверждаем, что индуцированная последовательность

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}_K(W, K) \leftarrow \mathrm{Hom}_K(V, K) \leftarrow \mathrm{Hom}_K(U, K) \leftarrow 0,$$

т. е. последовательность

$$0 \leftarrow W^* \leftarrow V^* \leftarrow U^* \leftarrow 0$$

также точна.

Точность во всех членах, кроме крайнего левого, есть общий факт, не связанный со спецификой векторных пространств и справедливый для произвольных модулей (см. § 2). Существенным моментом здесь является доказательство сюръективности отображения V^* в W^*. Чтобы установить ее, рассмотрим произвольный функционал g на W. Существует подпространство T в V, такое, что

$$V = \lambda(W) + T$$

есть прямая сумма. Фактически мы можем рассматривать W как подпространство в V, поскольку λ — вложение. Любой элемент из V имеет единственное представление в виде суммы $w+t$, где $w \in W$ и $t \in T$. Определим функционал f на V, положив $f(w+t) = g(w)$ для всех $w \in W$ и $t \in T$. Тогда ограничение f на $W (= \lambda(W))$ совпадает с g. Это и означает, что левое отображение в индуцированной последовательности сюръективно.

Пусть V и V' — два векторных пространства. Предположим, что нам задано отображение

$$V \times V' \to K,$$

записываемое так:

$$(x, x') \longmapsto \langle x, x' \rangle,$$

$x \in V$, $x' \in V'$. Мы называем это отображение *билинейным*, если для каждого $x \in V$ функция $x' \longmapsto \langle x, x' \rangle$ линейна и аналогично для каждого $x' \in V'$ функция $x \longmapsto \langle x, x' \rangle$ линейна. Элемент $x \in V$ называется *ортогональным* (или *перпендикулярным*) подмножеству S' в V', если $\langle x, x' \rangle = 0$ для всех $x' \in S'$. Аналогично определяется ортогональность элемента из V' подмножеству из V. Очевидно, что множество всех $x \in V$, ортогональных к S', есть подпространство в V.

Определяем *ядро слева* билинейного отображения как подпространство в V, ортогональное к V'; аналогично определяется *ядро справа*.

Пусть W' — ядро справа и W — ядро слева данного билинейного отображения

$$V \times V' \to K,$$

и пусть x' — некоторый элемент из V'. Тогда x' определяет функционал на V по правилу $x \longmapsto \langle x, x' \rangle$ и этот функционал, очевидно, зависит только от смежного класса x' по модулю W'; другими словами, если $x'_1 \equiv x'_2 \pmod{W'}$, то функционалы $x \longmapsto \langle x, x'_1 \rangle$ и $x \longmapsto \langle x, x'_2 \rangle$ равны. Следовательно, имеет место гомоморфизм

$$V' \to V^*,$$

ядро которого по определению есть точно W', откуда получаем инъективный гомоморфизм

$$0 \to V'/W' \to V^*.$$

Так как все функционалы, соответствующие элементам V', обращаются в нуль на W, то мы можем рассматривать их как функционалы на V/W, т. е. как элементы из $(V/W)^*$. Таким образом, в действительности мы получаем инъективный гомоморфизм

$$0 \to V'/W' \to (V/W)^*.$$

Можно было бы дать специальное название гомоморфизму

$$g\colon V' \to V^*,$$

для которого

$$\langle x, x' \rangle = \langle x, g(x') \rangle$$

при всех $x \in V$ и $x' \in V'$. Однако удобнее изображать этот гомоморфизм с помощью стрелок и называть индуцированным отображением, или естественным отображением. Давать ему особое имя — значило бы стремиться к излишнему утяжелению терминологии.

Теорема 6. *Пусть $V \times V' \to K$ — билинейное отображение, W, W' — его ядра слева и справа соответственно, и пусть V'/W' конечномерно. Тогда индуцированный гомоморфизм $V'/W' \to (V/W)^*$ является изоморфизмом.*

Доказательство. В силу симметрии имеет место индуцированный гомоморфизм

$$V/W \to (V'/W')^*,$$

являющийся инъективным. Так как

$$\dim (V'/W')^* = \dim V'/W',$$

то отсюда следует, что V/W конечномерно. Из инъективности предыдущего гомоморфизма и ему аналогичного, а именно

$$0 \to V'/W' \to (V/W)^*,$$

вытекают неравенства

$$\dim V/W \leqslant \dim V'/W'$$

и

$$\dim V'/W' \leqslant \dim V/W,$$

откуда следует, что эти размерности равны. Таким образом, наши гомоморфизмы сюръективны и обратны друг другу, что и доказывает теорему.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что всякий модуль над кольцом A является гомоморфным образом некоторого свободного модуля.

2. Обобщить утверждение теоремы 3 о размерности векторных пространств на свободные модули над произвольным коммутативным кольцом. [*Указание*: вспомнить, как аналогичное утверждение доказывалось для свободных абелевых групп, и воспользоваться максимальными идеалами вместо простых чисел.]

3. Провести подробное доказательство того, что условия расщепимости последовательности, данные в предложении 3, эквивалентны. Показать, что последовательность $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ расщепляется в том и только

в том случае, если существует подмодуль N в M, такой, что модуль M равен прямой сумме $\operatorname{Im} f \oplus N$ и что в этом случае N изоморфен M''. Восстановить все детали в доказательстве предложения 3.

4. Пусть A — коммутативное кольцо, M — A-модуль и S — мультипликативное подмножество в A. Определить $S^{-1}M$ способом, аналогичным тому, который мы использовали при определении $S^{-1}A$, и показать, что $S^{-1}M$ будет $S^{-1}A$-модулем.

5. Пусть A и S обозначают то же, что в упражнении 4. Показать, что если $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$—точная последовательность, то и последовательность $0 \to S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M'' \to 0$ точна.

6. Пусть V — векторное пространство над полем K и U, W — его подпространства. Показать, что

$$\dim U + \dim W = \dim (U + W) + \dim (U \cap W).$$

7. Пусть E и E_i ($i = 1, \ldots, m$) — модули над некоторым кольцом. Пусть $\varphi_i\colon E_i \to E$ и $\psi_i\colon E \to E_i$—гомоморфизмы, обладающие следующими свойствами:

$$\psi_i \circ \varphi_i = \mathrm{id}, \quad \psi_i \circ \varphi_j = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i \circ \psi_i = \mathrm{id}.$$

Показать, что отображение $x \longmapsto (\psi_1 x, \ldots, \psi_m x)$ является изоморфизмом E на прямое произведение модулей E_i ($i = 1, \ldots, m$), а отображение

$$(x_1, \ldots, x_m) \longmapsto \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_m x_m$$

— изоморфизмом этого прямого произведения на E.

Обратно, если модуль E равен прямому произведению (или сумме) подмодулей E_i ($i = 1, \ldots, m$) и если обозначить через φ_i вложение E_i в E и через ψ_i — проекцию E на E_i, то эти отображения обладают указанными выше свойствами.

8. *Проективные модули.* Пусть A — кольцо. Модуль P над A называется *проективным*, если для любых заданных гомоморфизма $f\colon P \to M''$ и сюръективного гомоморфизма $g\colon M \to M''$ существует гомоморфизм $h\colon P \to M$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & {\scriptstyle h}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ M & \xrightarrow[g]{} & M'' & \to & 0. \end{array}$$

Доказать:

(а) Прямая сумма модулей проективна в том и только в том случае, если каждое слагаемое проективно.

(б) Модуль P проективен в том и только в том случае, если существует модуль M, такой, что $P \oplus M$ свободен.

(в) Всякий модуль M может быть включен в точную последовательность $0 \to N \to F \to M \to 0$ с проективным модулем F (ср. упражнение 1).

(г) Модуль P проективен в том и только в том случае, если всякая точная последовательность

$$0 \to M' \to M \to P \to 0$$

расщепляется.

9. *Инъективные модули.* Пусть A — кольцо. Модуль Q называется *инъективным*, если для любых данных модуля N, его подмодуля N' и гомоморфизма $N' \to Q$ существует продолжение этого гомоморфизма на N, т. е. существует гомоморфизм $N \to Q$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & N' & \to & N \\ & & \downarrow & \swarrow & \\ & & Q & & \end{array}$$

Доказать:

(а) Прямое произведение модулей инъективно в том и только в том случае, если каждый сомножитель инъективен.

(б) Абелева группа $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, рассматриваемая как модуль над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$, инъективна. (Использовать лемму Цорна.) То же утверждение справедливо для $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, где $\mathbf{R}$ — группа вещественных чисел.

(в) Пусть Q — модуль над A. Предположим, что для всякого левого идеала J кольца A любой гомоморфизм $\varphi\colon J \to Q$ может быть продолжен до гомоморфизма A в Q. Тогда Q инъективен. [*Указание*: при заданных $N' \subset N$ и $f\colon N' \to Q$ возьмем $x_0 \in N$, $x_0 \notin N'$. Пусть J — левый идеал, состоящий из элементов $a \in A$, для которых $ax_0 \in N'$. Пусть гомоморфизм $\varphi(a) = f(ax_0)$ продолжен на A; продолжить f по формуле $f(x' + bx_0) = f(x') + \varphi(b)$ для $x' \in N'$ и $b \in A$. Затем использовать лемму Цорна.]

(г) Пусть $A_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(A, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$; превратим A_0 в A-модуль, полагая $(af)(x) = f(xa)$ для $a \in A$ и $f \in A_0$. Используя (в), показать, что A_0 инъективен.

(д) Всякий модуль является подмодулем некоторого инъективного модуля. [*Указание*: пусть M — A-модуль и $x \in M$, $x \neq 0$. Показать, что существует гомоморфизм $f_x\colon M \to A_0$, для которого $f_x(x) \neq 0$. Пусть J — идеал в A, аннулирующий x, и $\varphi\colon A \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ — гомоморфизм, обращающийся в нуль на J и такой, что $\varphi(1) \neq 0$. Построить f_x, для которого $f_x(x) = \varphi$. Затем взять произведение всех f_x.]

(е) Модуль Q инъективен тогда и только тогда, когда всякая точная последовательность

$$0 \to Q \to N \to M \to 0$$

расщепляется.

10. Пусть A — аддитивная подгруппа евклидова пространства $\mathbf{R}^n$; предположим, что во всякой ограниченной области пространства содержится лишь конечное число элементов из A. Показать, что A — свободная абелева группа с числом образующих $\leqslant n$. [*Указание*: провести индукцию по максимальному числу линейно независимых над $\mathbf{R}$ элементов из A. Пусть $v_1, \ldots, v_m$ — максимальное множество таких элементов, и пусть A_0 — подгруппа в A, содержащаяся в $\mathbf{R}$-пространстве, порожденном $v_1, \ldots, v_{m-1}$. По предположению индукции любой элемент в A_0 есть линейная целочисленная комбинация элементов $v_1, \ldots, v_{m-1}$. Пусть S — подмножество элементов $v \in A$ вида $v = a_1v_1 + \ldots + a_mv_m$ с вещественными коэффициентами a_i, удовлетворяющими неравенствам

$$0 \leqslant a_i < 1 \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, m-1;$$
$$0 \leqslant a_m \leqslant 1.$$

Пусть v_m' — элемент из S с наименьшим $a_m \neq 0$; показать, что $\{v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m'\}$ будет базисом в A над $\mathbf{Z}$.]