Глава IV

Гомологии

§ 1. Комплексы

Пусть A — кольцо. Под *открытым комплексом* A-модулей понимают последовательность модулей и гомоморфизмов $\{(E_i, d_i)\}$,

$$\to E_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} E_i \xrightarrow{d_i} E_{i+1} \to ,$$

где i пробегает все целые числа и d_i отображает E_i в E_{i+1}, причем

$$d_i \circ d_{i-1} = 0$$

для всех i.

Часто рассматривают конечные последовательности гомоморфизмов, скажем

$$E_1 \to \ldots \to E_r,$$

в которых композиция двух последовательных гомоморфизмов равна 0; такую последовательность можно превратить в комплекс, добавив нули на каждом конце

$$\to 0 \to 0 \to E_1 \to \ldots \to E_r \to 0 \to 0 \to .$$

Замкнутый комплекс A-модулей — это последовательность модулей и гомоморфизмов $\{(E_i, d_i)\}$, где i пробегает множество целых чисел по модулю n для некоторого $n \geqslant 2$, удовлетворяющая тому же свойству, что и выше, для композиций последовательных гомоморфизмов. Таким образом, замкнутый комплекс выглядит так:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & E_n \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

Мы называем *n длиной* замкнутого комплекса.

Можно, не опасаясь путаницы, опускать индекс i в d_i и писать просто d. Мы будем также обозначать комплекс $\{(E_i, d_i)\}$ через (E, d) и даже, еще короче, просто через E.

Пусть (E, d) и (E', d') — два комплекса (оба открытые или оба замкнутые), r — целое число. *Морфизм* (комплексов)

$$f\colon (E', d') \to (E, d)$$

степени r — это последовательность гомоморфизмов

$$f_i\colon E'_i \to E_{i+r},$$

таких, что для всякого i коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} E'_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & E_{i-1+r} \\ {\scriptstyle d'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ E'_i & \xrightarrow[f_i]{} & E_{i+r} \end{array}$$

Точно так же как мы пишем d вместо d_i, мы будем писать f вместо f_i. Если комплексы замкнуты, то мы определяем морфизм одного в другой только в том случае, если они имеют одинаковую длину.

Ясно, что комплексы образуют категорию.

Будет полезно ввести еще одно понятие, относящееся к объектам, занумерованным посредством моноида. Пусть G — моноид, который мы предположим коммутативным и аддитивным, имея в виду дальнейшие приложения. Пусть $\{M_i\}_{i\in G}$ — семейство модулей, занумерованных посредством G. Прямая сумма

$$M = \coprod_{i\in G} M_i$$

будет называться *G-градуированным модулем, ассоциированным с семейством* $\{M_i\}_{i\in G}$. Пусть $\{M_i\}_{i\in G}$ и $\{M'_i\}_{i\in G}$ — два семейства, занумерованные посредством G, и M, M' — ассоциированные с ними G-градуированные модули. Пусть $r\in G$. Под *G-градуированным морфизмом* $f\colon M'\to M$ степени r мы будем понимать гомоморфизм f, отображающий M'_i в M_{i+r} для всякого $i\in G$ (при этом M_i отождествляется с соответствующим подмодулем прямой суммы). Таким образом, f есть не что иное, как семейство гомоморфизмов $f_i\colon M'_i\to M_{i+r}$.

Если (E, d) — комплекс, то мы можем рассматривать E как G-градуированный модуль (взяв прямую сумму членов этого комплекса), а d — как G-градуированный морфизм степени 1, полагая G равным $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Обратно, если G есть $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, то мы можем рассматривать G-градуированный модуль как комплекс, считая по определению d нулевым отображением.

Для простоты мы будем часто опускать эпитет „G-градуированный“ перед словом „морфизм“, когда речь будет идти о G-градуированных морфизмах.