§ 2. Гомологическая последовательность

Пусть (E, d) — комплекс. Положим

$$Z_i(E) = \operatorname{Ker} d_i$$

и назовем $Z_i(E)$ модулем *i-циклов*. Положим, далее,

$$B_i(E) = \operatorname{Im} d_{i-1}$$

и назовем $B_i(E)$ модулем *i-границ*. Мы часто будем писать Z_i и B_i вместо $Z_i(E)$ и $B_i(E)$ соответственно. Будем называть группу

$$H_i(E) = Z_i/B_i = \operatorname{Ker} d_i/\operatorname{Im} d_{i-1}$$

i-й группой гомологий комплекса E. Градуированный модуль, ассоциированный с семейством $\{H_i\}$, будет обозначаться через $H(E)$ и называться *гомологией* комплекса E. Иногда пишут $H_*(E)$ вместо $H(E)$.

Если $f: E' \to E$ — морфизм комплексов, скажем, степени 0, то имеем индуцированный канонический гомоморфизм степени 0

$$f_*: H(E') \to H(E)$$

их гомологий. Это непосредственно видно из коммутативных диаграмм, участвующих в определении морфизма комплексов. Действительно, читатель тотчас проверит, что $f_i(Z'_i) \subset Z_i$ и $f_i(B'_i) \subset B_i$, откуда получается индуцированный гомоморфизм $Z'_i/B'_i \to Z_i/B_i$. (Читателю следует один и только один раз в своей жизни проследить все детали до конца.) Таким образом, H есть функтор из категории комплексов в категорию градуированных модулей. Можно было бы писать $H(f)$ вместо f_*, а также $H_i(f)$ или f_{i*} для индуцированного отображения на H'_i.

Рассмотрим короткую точную последовательность комплексов с морфизмами степени 0:

$$0 \to E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \to 0,$$

которая, если ее выписать целиком, выглядит так (пишем d вместо d' или d''):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & E'_{i-1} & \to & E_{i-1} & \to & E''_{i-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & E'_i & \xrightarrow{f} & E_i & \xrightarrow{g} & E''_i & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & \\
0 & \to & E'_{i+1} & \xrightarrow{f} & E_{i+1} & \xrightarrow{g} & E''_{i+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & E'_{i+2} & \to & E_{i+2} & \to & E''_{i+2} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}$$

Можно следующим образом определить морфизм степени 1

$$\delta\colon H(E'') \to H(E'),$$

или, что равносильно, семейство гомоморфизмов

$$\delta_i\colon H_i'' \to H_{i+1}'.$$

Пусть z'' лежит в Z_i''. Так как g сюръективно, то существует элемент $z \in E_i$, для которого $gz = z''$. Сдвинемся теперь вертикально вниз по стрелке d и возьмем dz. Используя коммутативность $gd = dg$, находим, что $gdz = 0$, т. е. dz лежит в $\operatorname{Ker} g \subset E_{i+1}$. В силу точности существует элемент $z' \in E_{i+1}'$, для которого $fz' = dz$. Кратко мы можем написать

$$z' = f^{-1}dg^{-1}z''.$$

Мы предоставляем читателю в качестве шаблонного упражнения проверить, что z' принадлежит Z_{i+1}', или, другими словами, является циклом, и что его класс по модулю B_{i+1}' не зависит от выбора элемента z, для которого $gz = z''$. Далее, отображение

$$z \mapsto f^{-1}dg^{-1}z \quad \text{по модулю} \quad B_{i+1}'$$

индуцирует гомоморфизм

$$\delta_i\colon Z_i''/B_i'' \to Z_{i+1}'/B_{i+1}',$$

который и является i-й компонентой искомого морфизма δ.

Теорема 1. *Пусть*

$$0 \to E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \to 0$$

— точная последовательность комплексов с морфизмами f, g *степени* 0. *Тогда последовательность*

$$\begin{tikzcd} H(E') \arrow[rr, "f_*"] & & H(E) \arrow[dl, "g_*"] \\ & H(E'') \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

точна.

Доказательство. Доказательство по существу шаблонно и состоит в петлянии по диаграммам. Однако читателю, желающему приобрести навык в подобного сорта тривиальностях, следует проследить его во всех деталях. В качестве примера докажем, что

$$\operatorname{Ker}\delta \subset \operatorname{Im} g_*.$$

Воспользуемся теми же обозначениями, которые были введены перед формулировкой теоремы при описании морфизма δ. Если z''

представляет класс, образ которого относительно δ равен 0, то это означает, что z' — граница, другими словами, что существует элемент $u' \in E'_i$, для которого $z' = du'$. Тогда, используя обозначения, введенные при определении δ, имеем

$$dz = fz' = f\,du' = d\,fu'$$

в силу коммутативности. Следовательно,

$$d(z - fu') = 0$$

и $z - fu'$ есть цикл в E_i. Но $g(z - fu') = gz = z''$. Это означает, что класс элемента z'' лежит в образе g_*, что и требовалось доказать.

Если фигурирующую в этой теореме гомологическую последовательность выписать полностью, то она выглядит следующим образом:

$$\boxed{\xrightarrow{\delta} H'_i \to H_i \to H''_i \xrightarrow{\delta} H'_{i+1} \to H_{i+1} \to H''_{i+1} \xrightarrow{\delta}}\,.$$

Ясно, что наше отображение δ функториально (в очевидном смысле) и, следовательно, все наше образование (H, δ) является функтором из категории коротких точных последовательностей комплексов в категорию комплексов.

§ 3. *Эйлерова характеристика*

Мы продолжаем рассматривать A-модули. Пусть Γ — абелева группа, записываемая аддитивно. Пусть φ — правило, сопоставляющее некоторым модулям элементы из Γ и удовлетворяющее следующему условию:

Если $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — *точная последовательность, то* $\varphi(M)$ *определено тогда и только тогда, когда определены* $\varphi(M')$ *и* $\varphi(M'')$, *и в этом случае*

$$\varphi(M) = \varphi(M') + \varphi(M'').$$

Кроме того, $\varphi(0)$ *определено и равно* 0.

Такое правило φ будет называться *отображением Эйлера — Пуанкаре* на категории A-модулей. В том случае, когда модуль M' изоморфен модулю M, из точности последовательности

$$0 \to M' \to M \to 0 \to 0$$

заключаем, что если $\varphi(M)$ определено, то и $\varphi(M')$ определено и $\varphi(M') = \varphi(M)$. Следовательно, если $\varphi(M)$ определено для модуля M,