представляет класс, образ которого относительно δ равен 0, то это означает, что z' — граница, другими словами, что существует элемент $u' \in E'_i$, для которого $z' = du'$. Тогда, используя обозначения, введенные при определении δ, имеем

$$dz = fz' = f\,du' = d\,fu'$$

в силу коммутативности. Следовательно,

$$d(z - fu') = 0$$

и $z - fu'$ есть цикл в E_i. Но $g(z - fu') = gz = z''$. Это означает, что класс элемента z'' лежит в образе g_*, что и требовалось доказать.

Если фигурирующую в этой теореме гомологическую последовательность выписать полностью, то она выглядит следующим образом:

$$\boxed{\xrightarrow{\delta} H'_i \to H_i \to H''_i \xrightarrow{\delta} H'_{i+1} \to H_{i+1} \to H''_{i+1} \xrightarrow{\delta}}\,.$$

Ясно, что наше отображение δ функториально (в очевидном смысле) и, следовательно, все наше образование (H, δ) является функтором из категории коротких точных последовательностей комплексов в категорию комплексов.

§ 3. *Эйлерова характеристика*

Мы продолжаем рассматривать A-модули. Пусть Γ — абелева группа, записываемая аддитивно. Пусть φ — правило, сопоставляющее некоторым модулям элементы из Γ и удовлетворяющее следующему условию:

Если $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — точная последовательность, то $\varphi(M)$ определено тогда и только тогда, когда определены $\varphi(M')$ и $\varphi(M'')$, и в этом случае

$$\varphi(M) = \varphi(M') + \varphi(M'').$$

Кроме того, $\varphi(0)$ определено и равно 0.

Такое правило φ будет называться *отображением Эйлера — Пуанкаре* на категории A-модулей. В том случае, когда модуль M' изоморфен модулю M, из точности последовательности

$$0 \to M' \to M \to 0 \to 0$$

заключаем, что если $\varphi(M)$ определено, то и $\varphi(M')$ определено и $\varphi(M') = \varphi(M)$. Следовательно, если $\varphi(M)$ определено для модуля M, то φ определено для всякого подмодуля и фактормодуля M. В частности, если имеется точная последовательность модулей

$$M' \to M \to M''$$

и если $\varphi(M')$ и $\varphi(M'')$ определены, то определено и $\varphi(M)$, что сразу видно, если рассмотреть ядро и образ наших двух отображений и применить определение.

Примеры. В случае $A = \mathbf{Z}$ можно считать φ определенным для всех конечных абелевых групп и равным порядку группы. Значения φ лежат в мультипликативной группе положительных рациональных чисел.

В качестве другого примера рассмотрим категорию векторных пространств над полем k. Можно считать φ определенным для конечномерных пространств и равным размерности. Значения φ лежат тогда в аддитивной группе целых чисел.

Вернемся к общему случаю. Пусть E — открытый комплекс, такой, что почти все H_i равны 0. Пусть φ — отображение Эйлера — Пуанкаре на категории модулей (т. е. A-модулей). Определим *характеристику Эйлера — Пуанкаре* $\chi_\varphi(E)$ (или, короче, эйлерову характеристику) относительно φ формулой

$$\chi_\varphi(E) = \sum (-1)^i \varphi(H_i)$$

при условии, что значения $\varphi(H_i)$ определены для всех H_i; в этом случае мы говорим, что χ_φ *определена* для комплекса E. Той же формулой определим характеристику Эйлера — Пуанкаре и в случае замкнутого комплекса E, длина n которого четна[1]).

За примером читатель может обратиться к упражнению 14 из гл. I.

Можно рассматривать H как комплекс, положив d равным нулевому отображению. При этом мы видим, что $\chi_\varphi(H)$ есть та же знакопеременная сумма, что и выше. Более общо:

Теорема 2. *Пусть F — комплекс, имеющий четную длину, в случае если он замкнут. Предположим, что $\varphi(F_i)$ определено для всех i и что выполнено одно из следующих двух условий:* (i) $F_i = 0$ *для почти всех i;* (ii) $\varphi(F_i) = 0$ *для почти всех i, и отображение φ таково, что $\varphi(M) = 0$ влечет $\varphi(M') = 0$ для всякого $M' \subset M$. Тогда характеристика $\chi_\varphi(F)$ определена и*

$$\chi_\varphi(F) = \sum_i (-1)^i \varphi(F_i).$$

Доказательство. Заметим сначала, что $\varphi(H_i)$ определено для всех i, а из условий (i) или (ii) вытекает, что $\varphi(H_i) = 0$ для

---

[1]) Здесь и ниже в формулировки автора внесены некоторые уточнения. — *Прим. ред.*

почти всех i. Следовательно, характеристика $\chi_\varphi(F)$ определена. Пусть Z_i и B_i — группы i-циклов и i-границ в F_i соответственно. Имеем точную последовательность

$$0 \to Z_i \to F_i \to B_{i+1} \to 0,$$

из которой получаем

$$\varphi(F_i) = \varphi(Z_i) + \varphi(B_{i+1}),$$

причем для почти всех i каждый из членов этого равенства обращается в нуль. Взяв знакопеременную сумму, немедленно получаем наше утверждение.

Комплекс, гомологии которого тривиальны, называется *ацикличным*.

Следствие. *Пусть F — ацикличный комплекс, удовлетворяющий условиям теоремы 2. Тогда*

$$\sum_i (-1)^i \varphi(F_i) = 0.$$

Если открытый комплекс F таков, что $F_i = 0$ для почти всех i, то его можно рассматривать как замкнутый комплекс, определив дополнительное отображение, идущее от дальнего правого нуля к дальнему левому нулю. Таким образом, в этом случае изучение открытого комплекса сводится к изучению замкнутого комплекса.

Теорема 3. *Пусть*

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

— точная последовательность комплексов с морфизмами степени 0. В случае замкнутых комплексов предполагаем, что их длина четна. Пусть φ — отображение Эйлера — Пуанкаре на категории модулей. Если характеристика χ_φ определена для двух из трех комплексов, то она определена и для третьего и

$$\chi_\varphi(E) = \chi_\varphi(E') + \chi_\varphi(E'').$$

Доказательство. Имеем точную гомологическую последовательность

$$\to H''_{i-1} \to H'_i \to H_i \to H''_i \to H'_{i+1} \to .$$

Эта гомологическая последовательность есть не что иное, как комплекс, гомологии которого тривиальны. Кроме того, каждая группа гомологий, принадлежащая, скажем E, стоит между группами гомологий E' и E''. Следовательно, если χ_φ определена для E' и E'', то она определена и для E. Аналогично рассуждаем и в двух других случаях. Если наши комплексы — замкнутые четной длины n, то гомологическая последовательность имеет четную длину $3n$. Поэтому мы можем применить следствие из теоремы 2 для получения искомого результата.

Для ряда приложений удобно построить универсальное отображение Эйлера. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое множество классов модулей относительно изоморфизма. Если E — модуль, то пусть $[E]$ — его класс относительно изоморфизма. Мы требуем, чтобы $\mathcal{A}$ удовлетворяло условию Эйлера — Пуанкаре, т. е. чтобы для всякой точной последовательности

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

класс $[E]$ тогда и только тогда лежал в $\mathcal{A}$, когда $[E']$ и $[E'']$ лежат в $\mathcal{A}$. Кроме того, нулевой модуль лежит в $\mathcal{A}$. *Мы утверждаем, что существует отображение*

$$\gamma\colon\ \mathcal{A} \to K(\mathcal{A})$$

множества $\mathcal{A}$ в некоторую абелеву группу $K(\mathcal{A})$, обладающую свойством универсальности по отношению к отображениям Эйлера — Пуанкаре, определенным на $\mathcal{A}$.

Чтобы построить это отображение, рассмотрим свободную абелеву группу $F_{ab}(\mathcal{A})$, порожденную множеством наших классов $[E]$. Пусть B — ее подгруппа, порожденная всеми элементами вида

$$[E] - [E'] - [E''],$$

где

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

— точная последовательность, члены которой лежат в $\mathcal{A}$. Пусть $K(\mathcal{A})$ — факторгруппа $F_{ab}(\mathcal{A})/B$, и пусть $\gamma\colon \mathcal{A} \to K(\mathcal{A})$ — естественное отображение. Ясно, что γ обладает свойством универсальности.

Отметим сходство этой конструкции с группой Гротендика моноида. И действительно, группа $K(\mathcal{A})$ известна под названием *группы Эйлера — Гротендика* множества $\mathcal{A}$.

Важное обобщение. Из предыдущего ясно, что бо́льшая часть того, что мы сделали, относится к чистой теории стрелок. Действительно, для определения гомологий нам нужны только понятия ядра и коядра (фактормодуля). Тот факт, что модули состоят из элементов, мы использовали лишь для определения δ.

Можно аксиоматизировать понятие категории, в которой все предыдущие рассуждения имеют смысл. Рассмотрим сначала категорию $\mathcal{A}$, такую, что $\mathrm{Mor}(E, F)$ есть абелева группа для каждой пары объектов E, F из $\mathcal{A}$, причем выполняются следующие два условия:

АБ 1. Закон композиции морфизмов билинеен, и существует нулевой объект 0, т. е. такой объект, что $\mathrm{Mor}(0, E)$ и $\mathrm{Mor}(E, 0)$ состоят ровно из одного элемента для любого E.

АБ 2. В этой категории существуют конечные произведения и конечные копроизведения.

Мы говорим тогда, что $\mathcal{A}$ — *аддитивная категория*

Для данного морфизма $E \xrightarrow{f} F$ в категории $\mathcal{A}$ его *ядром* по определению будет такой морфизм $E' \to E$, что для всех объектов X в этой категории точна следующая последовательность:

$$0 \to \mathrm{Mor}(X,\ E') \to \mathrm{Mor}(X,\ E) \to \mathrm{Mor}(X,\ F).$$

Мы определяем *коядро* f как морфизм $F \to F''$, такой, что для всех объектов X в категории точна следующая последовательность:

$$\mathrm{Mor}(E,\ X) \leftarrow \mathrm{Mor}(F,\ X) \leftarrow \mathrm{Mor}(F'',\ X) \leftarrow 0.$$

Непосредственно проверяется, что ядра и коядра универсальны в подходящих категориях и, следовательно, если существуют, то единственны с точностью до однозначно определенного изоморфизма

АБ 3. Ядра и коядра существуют.

АБ 4. Если f: $E \to F$ — морфизм, ядро которого есть 0, то f — ядро своего коядра. Если f: $E \to F$ — морфизм, коядро которого 0, то f — коядро своего ядра. Морфизм, ядро и коядро которого равны 0, есть изоморфизм.

Категория $\mathcal{A}$, удовлетворяющая предыдущим четырем аксиомам, называется *абелевой категорией.*

Например, комплексы модулей образуют абелеву категорию, поскольку ясно, как определить, скажем, ядро морфизма комплексов. В топологии абелеву категорию образуют так называемые векторные пучки.

§ 4. Теорема Жордана — Гёльдера

Мы начнем с некоторых чисто теоретико-групповых результатов. Как и элементарные теоремы об изоморфизмах, они имеют аналоги для модулей, которые будут сформулированы позже.

Лемма о бабочке (Цассенхауз). *Пусть U, V — подгруппы некоторой группы, и пусть u, v — нормальные подгруппы в U и в V соответственно. Тогда*

$$u(U \cap v) \text{ нормальна в } u(U \cap V),$$

$$(u \cap V)v \text{ нормальна в } (U \cap V)v$$

и соответствующие факторгруппы изоморфны, т. е.

$$u(U \cap V)/u(U \cap v) \approx (U \cap V)v/(u \cap V)v.$$