Глава VI

Нётеровы кольца и модули

§ 1. Основные критерии

Пусть A — кольцо и M — модуль (т. е. левый A-модуль). Мы будем говорить, что модуль M *нётеров*, если он удовлетворяет одному из следующих трех условий:

(i) Всякий подмодуль в M конечно порожден.

(ii) Всякая возрастающая последовательность подмодулей в M

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots,$$

такая, что $M_i \neq M_{i+1}$, конечна.

(iii) Всякое непустое множество S подмодулей в M содержит максимальный элемент (т. е. такой подмодуль M_0, что для любого элемента N из S, содержащего M_0, имеем $N = M_0$).

Докажем теперь, что три предыдущих условия эквивалентны.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что имеется возрастающая последовательность подмодулей в M. Пусть N — объединение всех M_i ($i = 1, 2, \ldots$). Тогда подмодуль N конечно порожден, скажем, элементами $x_1, \ldots, x_r$ и каждая образующая лежит в некотором M_i. Следовательно, существует такой индекс j, что

$$x_1, \ldots, x_r \in M_j.$$

Тогда

$$\langle x_1, \ldots, x_r \rangle \subset M_j \subset N = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle,$$

откуда вытекает равенство $M_j = N$, и наше утверждение доказано.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть N_0 — некоторый элемент из S. Если N_0 не максимален, то он содержится собственным образом в некотором подмодуле N_1. Если N_1 не максимален, то он содержится собственным образом в некотором подмодуле N_2. По индукции, если мы нашли подмодуль N_i, который не максимален, то он содержится в качестве собственного подмодуля в некотором подмодуле N_{i+1}. Таким образом, мы смогли бы построить бесконечную цепочку, что невозможно.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть N — подмодуль в M, $a_0 \in N$. Если $N \neq \langle a_0 \rangle$, то существует элемент $a_1 \in N$, не лежащий в $\langle a_0 \rangle$. Продолжая по ин-

дукции, мы можем найти возрастающую последовательность подмодулей в N, а именно

$$\langle a_0\rangle \subset \langle a_0, a_1\rangle \subset \langle a_0, a_1, a_2\rangle \subset \ldots,$$

включение в которой всякий раз собственное. Множество этих подмодулей содержит максимальный элемент, скажем подмодуль $\langle a_0, a_1, \ldots, a_r\rangle$, и этот конечно порожденный подмодуль, очевидно, должен быть равен N, что и требовалось показать.

Предложение 1. *Пусть M—нётеров A-модуль. Тогда всякий подмодуль и всякий фактормодуль модуля M нётеровы.*

Доказательство. Наше утверждение очевидно для подмодулей (скажем, в силу первого условия). Что касается фактормодулей, то пусть N — некоторый подмодуль и f: $M \to M/N$ — канонический гомоморфизм. Пусть $\overline{M}_1 \subset \overline{M}_2 \subset \ldots$ — возрастающая цепочка подмодулей в M/N, и пусть $M_i = f^{-1}(\overline{M}_i)$. Тогда $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ — возрастающая цепочка подмодулей в M, которая должна иметь максимальный элемент, скажем M_r, так что $M_i = M_r$ для $i \geqslant r$. Но $f(M_i) = \overline{M}_i$, что и доказывает наше утверждение.

Предложение 2. *Пусть M — модуль, N — его подмодуль. Предположим, что N и M/N нётеровы. Тогда M нётеров.*

Доказательство. С каждым подмодулем L в M мы можем связать пару модулей:

$$L \mapsto (L \cap N, (L+N)/N).$$

Мы утверждаем: если $E \subset F$—такие два подмодуля в M, что связанные с ними пары совпадают, то $E = F$. Чтобы убедиться в этом, возьмем $x \in F$. В силу предположенного равенства $(E+N)/N = (F+N)/N$ существуют элементы u, $v \in N$ и $y \in E$, такие, что $y + u = x + v$. Тогда

$$x - y = u - v \in F \cap N = E \cap N.$$

Так как $x = y + u - v$, то получаем отсюда, что $x \in E$, и наше утверждение доказано. Если мы имеем возрастающую последовательность

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots,$$

то связанные с ними пары образуют возрастающую последовательность подмодулей в N и M/N соответственно и эти последовательности должны стабилизироваться. Следовательно, наша последовательность $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ также стабилизируется в силу предыдущего утверждения.

Предложения 1 и 2 могут быть суммированы в следующем утверждении: в точной последовательности $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ модуль M нётеров тогда и только тогда, когда M' и M'' нётеровы.

Следствие. *Пусть M — модуль и N, N' — его подмодули. Если $M = N + N'$ и если оба модуля N, N' нётеровы, то M нётеров. Конечная прямая сумма нётеровых модулей нётерова.*

Доказательство. Заметим сначала, что прямое произведение $N \times N'$ нётерово, так как оно содержит N в качестве подмодуля, фактормодуль по которому изоморфен N', и применимо предложение 2. Имеет место сюръективный гомоморфизм

$$N \times N' \to M,$$

при котором пара (x, x'), где $x \in N$ и $x' \in N'$, переводится в $x + x'$. В силу предложения 1 отсюда вытекает, что M нётеров. Для конечных произведений (или сумм) предложение доказывается по индукции.

Кольцо называется *нётеровым*, если оно нётерово как левый модуль над собой. Это означает, что всякий левый идеал конечно порожден.

Предложение 3. *Пусть A — нётерово кольцо и M — конечно порожденный A-модуль. Тогда M нётеров.*

Доказательство. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$* — образующие M. Тогда существует гомоморфизм

$$f\colon A \times A \times \ldots \times A \to M$$

произведения кольца A на себя n раз, при котором

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n.$$

Этот гомоморфизм сюръективен. В силу следствия из предыдущего предложения произведение нётерово, и, следовательно, в силу предложения 1 модуль M нётеров.

Предложение 4. *Пусть A — нётерово кольцо и $\varphi\colon A \to B$ — сюръективный гомоморфизм колец. Тогда B нётерово.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{b}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{b}_n \subset \ldots$ — возрастающая цепочка левых идеалов в B, и пусть $\mathfrak{a}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{b}_i)$. Тогда $\mathfrak{a}_i$ образуют возрастающую цепочку левых идеалов в A, которая должна стабилизироваться, скажем, на $\mathfrak{a}_r$. Так как $\varphi(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{b}_i$ для всех i, то наше предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть A — коммутативное нётерово кольцо, S' — мультипликативное подмножество в A. Тогда кольцо $S^{-1}A$ нётерово.*

Доказательство. Мы предоставляем доказательство читателю в качестве упражнения.