§ 2. Теорема Гильберта

Теорема 1. *Пусть A — коммутативное нётерово кольцо. Тогда кольцо многочленов $A[X]$ также нётерово.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — идеал в $A[X]$. Обозначим через $\mathfrak{a}_i$ множество элементов $a \in A$, служащих старшими коэффициентами в многочленах

$$a_0 + a_1X + \ldots + aX^i,$$

лежащих в $\mathfrak{A}$. Тогда ясно, что $\mathfrak{a}_i$ есть идеал. (Если a, b лежат в $\mathfrak{a}_i$, то $a \pm b$ лежит в $\mathfrak{a}_i$; чтобы это увидеть, достаточно взять сумму и разность соответствующих многочленов. Если $x \in A$, то $xa \in \mathfrak{a}_i$ — это сразу видно, если умножить соответствующий многочлен на x.) Кроме того, имеем

$$\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots,$$

другими словами, наша последовательность идеалов $\{\mathfrak{a}_i\}$ возрастающая. Действительно, умножив упомянутый выше многочлен на X, мы найдем, что $a \in \mathfrak{a}_{i+1}$.

Последовательность идеалов $\{\mathfrak{a}_i\}$ стабилизируется, скажем, на $\mathfrak{a}_r$:

$$\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_{r+1} = \ldots .$$

Пусть

$$a_{01}, \ldots, a_{0n_0} \text{ — образующие для } \mathfrak{a}_0,$$

$$a_{r1}, \ldots, a_{rn_r} \text{ — образующие для } \mathfrak{a}_r.$$

Для каждого $i = 0, \ldots, r$ и $j = 1, \ldots, n_i$ пусть f_{ij} — многочлен из $\mathfrak{A}$ степени i со старшим коэффициентом a_{ij}. Мы утверждаем, что многочлены f_{ij} составляют множество образующих для $\mathfrak{A}$.

Пусть f — многочлен степени d из $\mathfrak{A}$. Индукцией по d мы докажем, что f лежит в идеале, порожденном f_{ij}. Пусть $d \geqslant 0$. Если $d > r$, то заметим, что старшие коэффициенты многочленов

$$X^{d-r}f_{r1}, \ldots, X^{d-r}f_{rn_r}$$

порождают $\mathfrak{a}_d$. Следовательно, существуют элементы $c_1, \ldots, c_{n_r} \in A$, такие, что многочлен

$$f - c_1X^{d-r}f_{r1} - \ldots - c_{n_r}X^{d-r}f_{rn_r}$$

имеет степень $< d$, причем этот многочлен также лежит в $\mathfrak{a}$. Если $d \leqslant r$, то мы также можем получить многочлен степени $< d$, лежащий в $\mathfrak{a}$, вычтя некоторую линейную комбинацию

$$f - c_1f_{d1} - \ldots - c_{n_d}f_{dn_d}.$$

Заметим, что многочлен, который мы вычли из f, лежит в идеале, порожденном f_{ij}. По индукции мы можем найти такой многочлен g

в идеале, порожденном f_{ij}, что $f-g=0$, доказав тем самым нашу теорему.

Следствие. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, и пусть $B=A[x_1, \ldots, x_m]$ — конечно порожденное коммутативное кольцо, содержащее A в качестве подкольца. Тогда B нётерово.*

Доказательство. Представив B как факторкольцо кольца многочленов, применим теорему 1 и предложение 4.

§ 3. Степенные ряды

Пусть X — некоторый символ, и пусть G — моноид функций на множестве $\{X\}$ со значениями в множестве натуральных чисел. Для всякого $\nu \in \mathbf{N}$ обозначим через X^ν функцию, значение которой в X равно ν. Тогда G — мультипликативный моноид, с которым мы уже сталкивались при рассмотрении многочленов. Его элементами будут $X^0, X^1, X^2, \ldots, X^\nu, \ldots$.

Пусть A — коммутативное кольцо, и пусть $A[[X]]$ — множество функций из G в A, причем на эти функции не накладывается никаких ограничений. Тогда всякий элемент из $A[[X]]$ можно рассматривать как элемент, сопоставляющий каждому одночлену X^ν некоторый коэффициент $a_\nu \in A$. Обозначим этот элемент через

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu.$$

Символ суммирования здесь, разумеется, только символ, но мы будем тем не менее записывать предыдущее выражение также в виде

$$a_0X^0+a_1X^1+\ldots$$

и называть его *формальным степенным рядом* от одной переменной с коэффициентами в A. Мы называем $a_0, a_1, \ldots$ коэффициентами этого ряда.

Если даны два элемента из $A[[X]]$, скажем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu \quad \text{и} \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu X^\mu,$$

то мы определяем их произведение

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i,$$

полагая

$$c_i=\sum_{\nu+\mu=i} a_\nu b_\mu.$$