в идеале, порожденном f_{ij}, что $f-g=0$, доказав тем самым нашу теорему.

Следствие. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, и пусть $B=A[x_1, \ldots, x_m]$ — конечно порожденное коммутативное кольцо, содержащее A в качестве подкольца. Тогда B нётерово.*

Доказательство. Представив B как факторкольцо кольца многочленов, применим теорему 1 и предложение 4.

§ 3. Степенные ряды

Пусть X — некоторый символ, и пусть G — моноид функций на множестве $\{X\}$ со значениями в множестве натуральных чисел. Для всякого $\nu \in \mathbf{N}$ обозначим через X^ν функцию, значение которой в X равно ν. Тогда G — мультипликативный моноид, с которым мы уже сталкивались при рассмотрении многочленов. Его элементами будут $X^0, X^1, X^2, \ldots, X^\nu, \ldots$.

Пусть A — коммутативное кольцо, и пусть $A[[X]]$ — множество функций из G в A, причем на эти функции не накладывается никаких ограничений. Тогда всякий элемент из $A[[X]]$ можно рассматривать как элемент, сопоставляющий каждому одночлену X^ν некоторый коэффициент $a_\nu \in A$. Обозначим этот элемент через

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu.$$

Символ суммирования здесь, разумеется, только символ, но мы будем тем не менее записывать предыдущее выражение также в виде

$$a_0X^0 + a_1X^1 + \ldots$$

и называть его *формальным степенным рядом* от одной переменной с коэффициентами в A. Мы называем $a_0, a_1, \ldots$ коэффициентами этого ряда.

Если даны два элемента из $A[[X]]$, скажем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu \quad \text{и} \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu X^\mu,$$

то мы определяем их произведение

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i,$$

полагая

$$c_i = \sum_{\nu+\mu=i} a_\nu b_\mu.$$

Их суммой, как и в случае многочленов, будет по определению

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu+b_\nu)X^\nu.$$

Тогда видно, что степенные ряды образуют кольцо, причем доказательство этого факта то же самое, что и для многочленов.

Можно также построить кольцо степенных рядов от нескольких переменных $A[[X_1, \ldots, X_n]]$, в котором каждый элемент может быть представлен в виде

$$\sum_{(\nu)} a_{(\nu)}X_1^{\nu_1}\ldots X_n^{\nu_n}=\sum a_{(\nu)}M_{(\nu)}(X_1, \ldots, X_n).$$

Коэффициенты $a_{(\nu)}$, выбираемые без всяких ограничений, находятся во взаимно однозначном соответствии с наборами из n целых чисел $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$, в которых $\nu_i \geqslant 0$ для всех i. Легко показать, что существует изоморфизм между $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ и кольцом повторных степенных рядов $A[[X_1]]\ldots[[X_n]]$. Мы предоставляем это в качестве упражнения читателю.

Теорема 2. *Если A нётерово*, то $A[[X]]$ *также нётерово.*

Доказательство. Наше рассуждение будет представлять собой видоизменение рассуждения, использованного при доказательстве теоремы Гильберта для многочленов. Мы будем рассматривать элементы наименьшей степени вместо элементов наибольшей степени.

Пусть $\mathfrak{A}$ — идеал в $A[[X]]$. Обозначим через $\mathfrak{a}_i$ множество элементов $a \in A$, таких, что a служит коэффициентом при X^i в некотором степенном ряде

$$aX^i + \text{члены более высокой степени},$$

лежащем в $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{a}_i$ — идеал в A и $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ (доказательство этого утверждения такое же, как для многочленов). Возрастающая цепочка идеалов стабилизируется:

$$\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_{r+1} = \ldots .$$

Как и прежде, пусть a_{ij} $(i=0, \ldots, r$ и $j=1, \ldots, n_i)$ — образующие для идеалов $\mathfrak{a}_i$, и пусть f_{ij} — степенные ряды, имеющие a_{ij} в качестве начальных коэффициентов. Если дан ряд $f \in \mathfrak{A}$, начинающийся с члена степени d, скажем $d \leqslant r$, то мы можем найти элементы

$$c_1, \ldots, c_{n_d} \in A,$$

такие, что ряд

$$f - c_1 f_{d1} - \ldots - c_{n_d} f_{dn_d}$$

начинается с члена степени $\geqslant d+1$. Действуя по индукции, мы можем предполагать, что $d > r$. Тогда, чтобы получить ряд, начинающийся с члена степени $\geqslant d+1$, используем линейную комбинацию

$$f - c_1^{(d)} X^{d-r} f_{r1} - \ldots - c_{n_r}^{(d)} X^{d-r} f_{rn_r}.$$

Таким образом, если ряд начинается с члена степени $d > r$, то он может быть представлен как линейная комбинация степенных рядов

$$f_{r1}, \ldots, f_{rn_r}$$

с коэффициентами

$$g_1(X) = \sum_{\nu=d}^{\infty} c_1^{(\nu)} X^{\nu-r}, \ldots, g_{n_r}(X) = \sum_{\nu=d}^{\infty} c_{n_r}^{(\nu)} X^{\nu-r},$$

и мы видим, что f_{ij} порождают наш идеал $\mathfrak{A}$, что и требовалось показать.

Следствие. *Если A — поле или нётерово коммутативное кольцо, то кольцо $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ нётерово.*

§ 4. Ассоциированные простые идеалы

В этом параграфе мы предполагаем, что A — коммутативное кольцо. Модули и гомоморфизмы, если не оговорено противное, будут A-модулями и A-гомоморфизмами.

Предложение 6. *Пусть S — мультипликативное подмножество в A, причем S не содержит 0. Тогда в A существует идеал, максимальный в множестве идеалов, не пересекающихся с S, и всякий такой идеал является простым.*

Доказательство. Существование такого идеала $\mathfrak{p}$ следует из леммы Цорна (множество идеалов, не пересекающихся с S, не пусто, так как содержит нулевой идеал, и, очевидно, является индуктивно упорядоченным). Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный элемент в этом множестве. Пусть $a, b \in A$, $ab \in \mathfrak{p}$, но $a \notin \mathfrak{p}$ и $b \notin \mathfrak{p}$. По предположению идеалы $(a, \mathfrak{p})$ и $(b, \mathfrak{p})$, порожденные a и $\mathfrak{p}$ (или b и $\mathfrak{p}$ соответственно), пересекаются с S, а потому существуют элементы $s, s' \in S$, $c, c' \in A$, $p, p' \in \mathfrak{p}$, такие, что

$$s = ca + p \quad \text{и} \quad s' = c'b + p'.$$

Перемножив эти два выражения, получим

$$ss' = cc'ab + p'',$$