начинается с члена степени $\geqslant d+1$. Действуя по индукции, мы можем предполагать, что $d > r$. Тогда, чтобы получить ряд, начинающийся с члена степени $\geqslant d+1$, используем линейную комбинацию

$$f - c_1^{(d)} X^{d-r} f_{r1} - \ldots - c_{n_r}^{(d)} X^{d-r} f_{rn_r}.$$

Таким образом, если ряд начинается с члена степени $d > r$, то он может быть представлен как линейная комбинация степенных рядов

$$f_{r1}, \ldots, f_{rn_r}$$

с коэффициентами

$$g_1(X) = \sum_{\nu=d}^{\infty} c_1^{(\nu)} X^{\nu-r}, \ \ldots, \ g_{n_r}(X) = \sum_{\nu=d}^{\infty} c_{n_r}^{(\nu)} X^{\nu-r},$$

и мы видим, что f_{ij} порождают наш идеал $\mathfrak{A}$, что и требовалось показать.

Следствие. *Если A — поле или нётерово коммутативное кольцо, то кольцо $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ нётерово.*

§ 4. Ассоциированные простые идеалы

В этом параграфе мы предполагаем, что A — коммутативное кольцо. Модули и гомоморфизмы, если не оговорено противное, будут A-модулями и A-гомоморфизмами.

Предложение 6. *Пусть S — мультипликативное подмножество в A, причем S не содержит 0. Тогда в A существует идеал, максимальный в множестве идеалов, не пересекающихся с S, и всякий такой идеал является простым.*

Доказательство. Существование такого идеала $\mathfrak{p}$ следует из леммы Цорна (множество идеалов, не пересекающихся с S, не пусто, так как содержит нулевой идеал, и, очевидно, является индуктивно упорядоченным). Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный элемент в этом множестве. Пусть $a, b \in A$, $ab \in \mathfrak{p}$, но $a \notin \mathfrak{p}$ и $b \notin \mathfrak{p}$. По предположению идеалы $(a, \mathfrak{p})$ и $(b, \mathfrak{p})$, порожденные a и $\mathfrak{p}$ (или b и $\mathfrak{p}$ соответственно), пересекаются с S, а потому существуют элементы $s, s' \in S$, $c, c' \in A$, $p, p' \in \mathfrak{p}$, такие, что

$$s = ca + p \quad \text{и} \quad s' = c'b + p'.$$

Перемножив эти два выражения, получим

$$ss' = cc'ab + p'',$$

где p'' — некоторый элемент из $\mathfrak{p}$. Отсюда вытекает, что ss' лежит в $\mathfrak{p}$. Это противоречит тому факту, что $\mathfrak{p}$ не пересекается с S, и тем самым доказывает, что идеал $\mathfrak{p}$ простой.

Элемент a кольца A называется *нильпотентным*, если существует целое число $n \geqslant 1$, такое, что $a^n = 0$.

Следствие 1. *Элемент a кольца A нильпотентен в том и только в том случае, если он лежит во всяком простом идеале кольца A.*

Доказательство. Если $a^n = 0$, то $a^n \in \mathfrak{p}$ для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ и, следовательно, $a \in \mathfrak{p}$. Если $a^n \neq 0$ ни для какого положительного числа n, то обозначим через S мультипликативное подмножество, состоящее из степеней a, а именно $\{1, a, a^2, \ldots\}$, и, согласно предложению, найдем простой идеал, не пересекающийся с S, доказав тем самым обратное предложение.

Нильрадикалом идеала $\mathfrak{a} \subset A$ называется множество всех $a \in A$, таких, что $a^n \in \mathfrak{a}$ для некоторого целого $n \geqslant 1$ (или, что эквивалентно, множество элементов $a \in A$, образ которых в факторкольце $A/\mathfrak{a}$ нильпотентен). Заметим, что нильрадикал идеала $\mathfrak{a}$ является идеалом, поскольку из $a^n = 0$ и $b^m = 0$ следует $(a + b)^k = 0$ для достаточно большого k: в биномиальном разложении либо a, либо b будет появляться в степени, не меньшей, чем n или m.

Следствие 2. *Элемент a кольца A лежит в нильрадикале идеала $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда, когда он лежит во всяком простом идеале, содержащем $\mathfrak{a}$.*

Доказательство. Следствие 2 эквивалентно следствию 1, примененному к кольцу $A/\mathfrak{a}$.

Распространим следствие 1 на модули. Сделаем сначала несколько замечаний о локализации. Пусть S — мультипликативное подмножество в A. Для всякого модуля M можно определить $S^{-1}M$ тем же способом, как мы определили $S^{-1}A$. Рассматриваем классы эквивалентности пар (x, s), где $x \in M$ и $s \in S$, причем две пары (x, s) и (x', s') эквивалентны, если существует элемент $s_1 \in S$, такой, что $s_1(s'x - sx') = 0$. Обозначим класс эквивалентности пары (x, s) через x/s. Тотчас проверяется, что множество классов эквивалентности — аддитивная группа (относительно очевидных операций). В действительности она является A-модулем относительно операции

$$(a, x/s) \mapsto ax/s.$$

Этот модуль классов эквивалентности мы и будем обозначать через $S^{-1}M$. (Отметим, что $S^{-1}M$ можно было бы также рассматривать как $S^{-1}A$-модуль.)

Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A и S — дополнение к $\mathfrak{p}$ в A, то $S^{-1}M$ обозначается также через $M_{\mathfrak{p}}$.

Из определений тривиально вытекает, что если $N \to M$ — инъективный гомоморфизм, то имеется естественное вложение $S^{-1}N \to S^{-1}M$. Другими словами, если N — подмодуль в M, то $S^{-1}N$ можно рассматривать как подмодуль в $S^{-1}M$.

Если $x \in N$ и $s \in S$, то дробь x/s может рассматриваться как элемент из $S^{-1}N$ или $S^{-1}M$. Если $x/s = 0$ в $S^{-1}M$, то существует элемент $s_1 \in S$, такой, что $s_1 x = 0$, а это означает, что x/s есть 0 также и в $S^{-1}N$. Таким образом, если $\mathfrak{p}$ — простой идеал и N — подмодуль в M, то имеется естественное вложение $N_{\mathfrak{p}}$ в $M_{\mathfrak{p}}$. Фактически мы будем отождествлять $N_{\mathfrak{p}}$ с подмодулем в $M_{\mathfrak{p}}$. В частности, мы видим, что $M_{\mathfrak{p}}$ есть сумма своих подмодулей $(Ax)_{\mathfrak{p}}$, где $x \in M$ (но, разумеется, не прямая сумма).

Пусть $x \in M$. *Аннулятор* $\mathfrak{a}$ элемента x — это идеал, состоящий из всех элементов $a \in A$, таких, что $ax = 0$. Имеет место изоморфизм (модулей)

$$A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\approx} Ax$$

относительно отображения

$$a \longmapsto ax.$$

Лемма. *Пусть x — элемент модуля M, $\mathfrak{a}$ — его аннулятор и $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A. Тогда $(Ax)_{\mathfrak{p}} \neq 0$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{p}$ содержит $\mathfrak{a}$.*

Доказательство. Лемма является непосредственным следствием определений, и ее доказательство предоставляется читателю.

Пусть a — элемент из A. Пусть M — некоторый модуль. Гомоморфизм

$$x \longmapsto ax, \quad x \in M$$

будет называться *главным гомоморфизмом*, ассоциированным с a, и будет обозначаться через a_M. Мы будем говорить, что a_M *локально нильпотентен*, если для каждого $x \in M$ существует такое целое число $n(x) \geqslant 1$, что $a^{n(x)}x = 0$. Из этого условия следует, что для всякого конечно порожденного подмодуля N в M существует такое целое число $n \geqslant 1$, что $a^n N = 0$: достаточно взять в качестве n наибольшую из степеней a, аннулирующих конечное множество образующих N. Поэтому *если модуль M конечно порожден, то гомоморфизм a_M локально нильпотентен в точности тогда, когда он нильпотентен.*

Предложение 7. *Пусть M — модуль, $a \in A$. Тогда a_M локально нильпотентен в том и только в том случае, если a лежит во всяком простом идеале $\mathfrak{p}$, для которого $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$.*

Доказательство. Предположим, что a_M локально нильпотентен. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, такой, что $M_\mathfrak{p} \neq 0$. Тогда существует $x \in M$, для которого $(Ax)_\mathfrak{p} \neq 0$. Пусть n — такое положительное число, что $a^n x = 0$. Обозначим через $\mathfrak{a}$ аннулятор элемента x. Тогда $a^n \in \mathfrak{a}$ и, следовательно, мы можем, применив лемму и следствие 2 предложения 6, заключить, что a лежит во всяком простом идеале $\mathfrak{p}$, таком, что $M_\mathfrak{p} \neq 0$. Обратно, если дан элемент $x \in M$, $x \neq 0$, то рассмотрим модуль Ax и, обратив предыдущие рассуждения, докажем, что $a^n x = 0$ для некоторого $n \geqslant 1$, установив тем самым локальную нильпотентность гомоморфизма a_M.

Пусть M — модуль. Простой идеал $\mathfrak{p}$ в A будет называться *ассоциированным* с M, если существует элемент $x \in M$, аннулятор которого совпадает с $\mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{p} \neq A$, то, в частности, $x \neq 0$.

Предложение 8. *Пусть M — модуль $\neq 0$ и $\mathfrak{p}$ — максимальный элемент в множестве идеалов, являющихся аннуляторами элементов $x \in M$, $x \neq 0$. Тогда $\mathfrak{p}$ — простой идеал.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p}$ — аннулятор элемента $x \neq 0$. Тогда $\mathfrak{p} \neq A$. Пусть a, $b \in A$, $ab \in \mathfrak{p}$, $a \notin \mathfrak{p}$. Тогда $ax \neq 0$. Но идеал $(b, \mathfrak{p})$ аннулирует ax и содержит $\mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{p}$ максимален, то отсюда вытекает, что $b \in \mathfrak{p}$ и, следовательно, $\mathfrak{p}$ — простой идеал.

Следствие 1. *Если кольцо A нётерово и M — модуль $\neq 0$, то существует простой идеал, ассоциированный с M.*

Доказательство. Множество идеалов, определенное в формулировке предложения 8, не пусто, поскольку $M \neq 0$, и содержит максимальный элемент, поскольку A нётерово.

Следствие 2. *Предположим, что и A, и M нётеровы, $M \neq 0$. Тогда существует последовательность подмодулей*

$$M = M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_r = 0,$$

такая, что каждый фактормодуль M_i/M_{i+1} изоморфен $A/\mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — некоторый простой идеал.

Доказательство. Рассмотрим множество подмодулей, обладающих свойством, описанным в формулировке следствия. Оно не пусто, поскольку существует простой идеал $\mathfrak{p}$, ассоциированный с M, и если $\mathfrak{p}$ — аннулятор x, то $Ax \approx A/\mathfrak{p}$. Пусть N — максимальный элемент в этом множестве. Если $N \neq M$, то в силу предыдущего рассуждения, примененного к M/N, существует подмодуль N' в M, такой, что N'/N изоморфен $A/\mathfrak{p}$ для некоторого $\mathfrak{p}$, а это противоречит максимальности N.

Предложение 9. *Пусть кольцо A нётерово и $a \in A$. Пусть M — модуль. Тогда гомоморфизм a_M инъективен в том и только в том случае, если a не лежит ни в одном из простых идеалов, ассоциированных с M.*

Доказательство. Предположим, что a_M не инъективен, так что $ax = 0$ для некоторого $x \in M$, $x \neq 0$. В силу следствия 1 предложения 8 существует простой идеал $\mathfrak{p}$, ассоциированный с Ax и a есть элемент этого $\mathfrak{p}$. Обратно, если a_M инъективен, то a не может лежать ни в каком ассоциированном простом идеале, потому что a не аннулирует никакого ненулевого элемента из M.

Предложение 10. *Пусть кольцо A нётерово и M — модуль. Пусть $a \in A$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *a_M локально нильпотентен;*

(2) *a лежит в каждом ассоциированном с M простом идеале;*

(3) *a лежит в каждом простом идеале $\mathfrak{p}$, для которого $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$.*

Доказательство. То, что (1) влечет (2), очевидно из определений и не нуждается в предположении, что A нётерово. Не нуждается в этом предположении и то, доказанное в предположении 7, утверждение, что (3) влечет (1). Мы должны, таким образом, показать, что (2) влечет (3). Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал, для которого $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Тогда существует элемент $x \in M$, такой, что $(Ax)_{\mathfrak{p}} \neq 0$. В силу предложения 8 в A существует простой идеал $\mathfrak{q}$, ассоциированный с $(Ax)_{\mathfrak{p}}$. Следовательно, существует элемент y/s в $(Ax)_{\mathfrak{p}}$ с $y \in Ax$, $s \notin \mathfrak{p}$ и $y/s \neq 0$, аннулятор которого совпадает с $\mathfrak{q}$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, так как иначе существовало бы $b \in \mathfrak{q}$, $b \notin \mathfrak{p}$, причем $0 = by/s$, откуда $y/s = 0$ — противоречие.

Пусть теперь $a_1, \ldots, a_r$ — конечное множество образующих идеала $\mathfrak{q}$. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, r$ существует элемент $t_i \notin \mathfrak{p}$, такой, что $t_i a_i y = 0$. Очевидно, $t = t_1 \ldots t_r \notin \mathfrak{p}$. Всякий элемент из $\mathfrak{q}$ аннулирует элемент ty в M, и если $a(ty) = 0$ в M, то $ay/s = 0$ в $M_{\mathfrak{p}}$, откуда $a \in \mathfrak{q}$. Следовательно, $\mathfrak{q}$ — аннулятор элемента ty в M, являющийся ассоциированным с M простым идеалом. Это как раз и требовалось установить.

Следствие. *Пусть кольцо A нётерово и M — модуль. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует только один ассоциированный с M простой идеал;*

(2) *$M \neq 0$, и для всякого $a \in A$ гомоморфизм a_M либо инъективен, либо локально нильпотентен. При выполнении этих условий множество тех элементов $a \in A$, для которых a_M локально нильпотентен, совпадает с простым идеалом, ассоциированным с M.*

Доказательство. Это непосредственное следствие предложений 9 и 10.

Приводимое ниже предложение будет использовано в следующем параграфе, чтобы при некоторых условиях охарактеризовать ассоциированные с модулем простые идеалы.

Предложение 11. *Пусть N — подмодуль в M. Всякий простой идеал, ассоциированный с N, ассоциирован также и с M. Любой ассоциированный с модулем M простой идеал ассоциирован также либо с N, либо с M/N.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Пусть $\mathfrak{p}$ — ассоциированный с M простой идеал, скажем $\mathfrak{p}$ есть аннулятор элемента $x \neq 0$. Если $Ax \cap N = 0$, то Ax изоморфен подмодулю из M/N и, следовательно, $\mathfrak{p}$ ассоциирован с M/N. Если $Ax \cap N \neq 0$, то мы рассматриваем $Ax \cap N$ как модуль над целостным кольцом $A/\mathfrak{p}$ и ясно, что аннулятор любого ненулевого элемента из $Ax \cap N$ в $A/\mathfrak{p}$ есть 0. Следовательно, его аннулятор в A есть $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}$ ассоциирован с N, что и требовалось показать.

§ 5. Примарное разложение

Мы продолжаем предполагать, что A — коммутативное кольцо и что модули (соответственно гомоморфизмы) — это A-модули (соответственно A-гомоморфизмы), если не оговорено противное.

Пусть M — модуль. Подмодуль Q в M называется *примарным*, если $Q \neq M$ и если для любого данного $a \in A$ гомоморфизм $a_{M/Q}$ либо инъективен, либо нильпотентен. Рассматривая A как модуль над собой, мы получаем, что идеал $\mathfrak{q}$ примарен тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующему условию:

если $a, b \in A$, $ab \in \mathfrak{q}$ и $a \notin \mathfrak{q}$, то $b^n \in \mathfrak{q}$ для некоторого $n \geqslant 1$.

Пусть Q — примарный подмодуль и $\mathfrak{p}$ — идеал, состоящий из всех элементов $a \in A$, для которых $a_{M/Q}$ нильпотентен. Тогда $\mathfrak{p}$ — простой идеал. Действительно, предположим, что $a, b \in A$, $ab \in \mathfrak{p}$ и $a \notin \mathfrak{p}$. Тогда $a_{M/Q}$ инъективен и, следовательно, $a^n_{M/Q}$ инъективен для всех $n \geqslant 1$. Из нильпотентности $(ab)_{M/Q}$ теперь вытекает, что $b_{M/Q}$ должен быть нильпотентен и, следовательно, что $b \in \mathfrak{p}$. Этим доказано, что идеал $\mathfrak{p}$ простой. Мы будем называть $\mathfrak{p}$ простым идеалом, *соответствующим* Q, а также говорить, что Q $\mathfrak{p}$-примарен[1]).

---

[1]) Говорят также, что Q *принадлежит* простому идеалу $\mathfrak{p}$. — *Прим. ред.*