

**Доказательство.** Это непосредственное следствие предложений 9 и 10.

Приводимое ниже предложение будет использовано в следующем параграфе, чтобы при некоторых условиях охарактеризовать ассоциированные с модулем простые идеалы.

**Предложение 11.** *Пусть  $N$  — подмодуль в  $M$ . Всякий простой идеал, ассоциированный с  $N$ , ассоциирован также и с  $M$ . Любой ассоциированный с модулем  $M$  простой идеал ассоциирован также либо с  $N$ , либо с  $M/N$ .*

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно. Пусть  $\mathfrak{p}$  — ассоциированный с  $M$  простой идеал, скажем  $\mathfrak{p}$  есть аннулятор элемента  $x \neq 0$ . Если  $Ax \cap N = 0$ , то  $Ax$  изоморфен подмодулю из  $M/N$  и, следовательно,  $\mathfrak{p}$  ассоциирован с  $M/N$ . Если  $Ax \cap N \neq 0$ , то мы рассматриваем  $Ax \cap N$  как модуль над целостным кольцом  $A/\mathfrak{p}$  и ясно, что аннулятор любого ненулевого элемента из  $Ax \cap N$  в  $A/\mathfrak{p}$  есть 0. Следовательно, его аннулятор в  $A$  есть  $\mathfrak{p}$  и  $\mathfrak{p}$  ассоциирован с  $N$ , что и требовалось показать.

### § 5. Примарное разложение

*Мы продолжаем предполагать, что  $A$  — коммутативное кольцо и что модули (соответственно гомоморфизмы) — это  $A$ -модули (соответственно  $A$ -гомоморфизмы), если не оговорено противное.*

Пусть  $M$  — модуль. Подмодуль  $Q$  в  $M$  называется *примарным*, если  $Q \neq M$  и если для любого данного  $a \in A$  гомоморфизм  $a_{M/Q}$  либо инъективен, либо нильпотентен. Рассматривая  $A$  как модуль над собой, мы получаем, что идеал  $\mathfrak{q}$  примарен тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующему условию:

*если  $a, b \in A$ ,  $ab \in \mathfrak{q}$  и  $a \notin \mathfrak{q}$ , то  $b^n \in \mathfrak{q}$  для некоторого  $n \geq 1$ .*

Пусть  $Q$  — примарный подмодуль и  $\mathfrak{p}$  — идеал, состоящий из всех элементов  $a \in A$ , для которых  $a_{M/Q}$  нильпотентен. Тогда  $\mathfrak{p}$  — простой идеал. Действительно, предположим, что  $a, b \in A$ ,  $ab \in \mathfrak{p}$  и  $a \notin \mathfrak{p}$ . Тогда  $a_{M/Q}$  инъективен и, следовательно,  $a_{M/Q}^n$  инъективен для всех  $n \geq 1$ . Из нильпотентности  $(ab)_{M/Q}$  теперь вытекает, что  $b_{M/Q}$  должен быть нильпотентен и, следовательно, что  $b \in \mathfrak{p}$ . Этим доказано, что идеал  $\mathfrak{p}$  простой. Мы будем называть  $\mathfrak{p}$  простым идеалом, *соответствующим*  $Q$ , а также говорить, что  $Q$   $\mathfrak{p}$ -примарен<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup>) Говорят также, что  $Q$  принадлежит простому идеалу  $\mathfrak{p}$ . — Прим. ред.

**Предложение 12.** Пусть  $M$  — модуль,  $Q_1, \dots, Q_r$  — подмодули,  $\mathfrak{p}$ -примарные для одного и того же простого идеала  $\mathfrak{p}$ . Тогда подмодуль  $Q_1 \cap \dots \cap Q_r$ , также  $\mathfrak{p}$ -примарен.

**Доказательство.** Положим  $N = Q_1 \cap \dots \cap Q_r$ . Пусть  $a \in \mathfrak{p}$ , и пусть  $n_i$  таковы, что  $(a_{M/Q_i})^{n_i} = 0$  для каждого  $i = 1, \dots, r$ ; обозначим через  $n$  максимум из  $n_1, \dots, n_r$ . Тогда  $(a_{M/Q})^n = 0$ , так что  $a_{M/Q}$  нильпотентен. Обратно, предположим, что  $a \notin \mathfrak{p}$ . Пусть  $x \in M$ ,  $x \notin Q_j$  для некоторого  $j$ . Тогда  $a^n x \notin Q_j$  для всех положительных  $n$  и, следовательно,  $a_{M/Q}$  инъективен. Это доказывает наше предложение.

Пусть  $N$  — подмодуль в  $M$ . Если  $N$  представлен в виде конечного пересечения примарных подмодулей, скажем

$$N = Q_1 \cap \dots \cap Q_r,$$

то мы будем называть это представление *примарным разложением* подмодуля  $N$ . Используя предложение 12, мы видим, что, сгруппировав  $Q_i$  по их простым идеалам, мы всегда можем получить из данного примарного разложения другое, в котором простые идеалы, соответствующие примарным подмодулям, все различны. Примарное разложение подмодуля  $N$ , в котором простые идеалы  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ , соответствующие  $Q_1, \dots, Q_r$ , различны, причем  $N$  не может быть представлен в виде пересечения собственного подсемейства примарных подмодулей  $\{Q_1, \dots, Q_r\}$ , будет называться *несократимым*. Вычеркивая некоторые из примарных модулей, участвующих в данном разложении, мы находим, что если подмодуль  $N$  обладает каким-то примарным разложением, то он обладает и несократимым разложением. Мы докажем сейчас результат, дающий некоторое свойство единственности несократимого примарного разложения.

Пусть  $Q_1 \cap \dots \cap Q_r = N$  — несократимое примарное разложение, причем  $\mathfrak{p}_i$  соответствует  $Q_i$ . Если  $\mathfrak{p}_i$  не содержит никакого  $\mathfrak{p}_j$  ( $j \neq i$ ), то мы говорим, что  $\mathfrak{p}_i$  *изолирован*. Изолированные простые идеалы — это, таким образом, те простые идеалы, которые минимальны в множестве простых идеалов, соответствующих примарным модулям  $Q_i$ .

**Теорема 3.** Пусть  $N$  — подмодуль в  $M$ , и пусть

$$N = Q_1 \cap \dots \cap Q_r = Q'_1 \cap \dots \cap Q'_s$$

— два его несократимых примарных разложения. Тогда  $r = s$ . Множество простых идеалов, соответствующих  $Q_1, \dots, Q_r$  и  $Q'_1, \dots, Q'_r$ , одно и то же. Если  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m\}$  — множество изолированных простых идеалов, соответствующих этим разложениям, то  $Q_i = Q'_i$  для  $i = 1, \dots, m$ , другими словами, примарные модули, принадлежащие изолированным простым идеалам, однозначно определены.

**Доказательство.** Предположим, что, после возможной перестановки индексов,  $\mathfrak{p}_1$  максимальен в множестве простых идеалов, соответствующих примарным модулям  $Q'_i$  и  $Q_i$ , и что  $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}'_j$  для  $j = 1, \dots, s$ . Тогда существует такой элемент  $a \in \mathfrak{p}_1$ , что  $a \notin \mathfrak{p}_i$  ( $i = 2, \dots, r$ ) и  $a \notin \mathfrak{p}'_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ). Пусть  $n \geq 1$  — целое число, для которого  $a^n M \subset Q_1$ . Обозначим через  $N^*$  модуль элементов  $x \in M$ , таких, что  $a^n x \in N$ . Мы утверждаем, что  $N^* = Q_2 \cap \dots \cap Q_r$ . Ясно, что

$$Q_2 \cap \dots \cap Q_r \subset N^*.$$

Обратно, если  $x \in M$ ,  $x \notin Q_i$  для некоторого  $i > 1$ , то  $a^n x \notin Q_i$ , поскольку  $a \notin \mathfrak{p}_i$ . Следовательно,  $N^* \subset Q_2 \cap \dots \cap Q_r$ . Те же рассуждения показывают, что если  $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}'_j$  для  $j = 1, \dots, s$ , то

$$Q_2 \cap \dots \cap Q_r = Q'_1 \cap \dots \cap Q'_s,$$

вопреки предположению, что наше представление  $N$  в виде пересечения примарных модулей несократимо. Это доказывает, что  $\mathfrak{p}_1$  встречается в множестве  $\{\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_s\}$ , скажем  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}'_1$ , а также, что

$$Q_2 \cap \dots \cap Q_r = Q'_2 \cap \dots \cap Q'_s.$$

Остается доказать единственность примарного модуля, принадлежащего изолированному простому идеалу, скажем  $\mathfrak{p}_1$ . По определению для каждого  $j = 2, \dots, r$  существует  $a_j \in \mathfrak{p}_j$ ,  $a_j \notin \mathfrak{p}_1$ . Пусть  $a = a_2 \dots a_r$  — произведение этих элементов. Тогда  $a \in \mathfrak{p}_j$  для всех  $j > 1$ , но  $a \notin \mathfrak{p}_1$ . Мы можем найти целое число  $n \geq 1$ , такое, что  $a_{M/Q_j}^n = 0$  для  $j = 2, \dots, r$ . Пусть

$$N_m = \text{множество таких } x \in M, \text{ что } a^m x \in N.$$

Мы утверждаем, что  $Q_1 = N_m$  для всех достаточно больших  $m$ . Этим будет доказана искомая единственность. Пусть  $x \in Q_1$ . Тогда  $a^m x \in Q_1 \cap \dots \cap Q_r = N$ , так что  $x \in N_m$ . Обратно, пусть  $x \in N_m$ , так что  $a^m x \in N$  и, в частности,  $a^m x \in Q_1$ . Так как  $a \notin \mathfrak{p}_1$ , то по определению  $a_{M/Q_1}$  инъективен. Следовательно,  $x \in Q_1$  и тем самым наша теорема доказана.

**Теорема 4.** *Всякий подмодуль  $N$  нётерова модуля  $M$  обладает примарным разложением.*

**Доказательство.** Рассмотрим множество подмодулей в  $M$ , не обладающих примарным разложением. Если это множество не пусто, то ввиду нётеровости  $M$  оно имеет максимальный элемент,

который мы обозначим через  $N$ . Подмодуль  $N$  не примарен, т. е. существует  $a \in A$ , такое, что  $a_{M/N}$  ни инъективен, ни нильпотентен. Возрастающая последовательность модулей

$$\text{Ker } a_{M/N} \subset \text{Ker } a_{M/N}^2 \subset \text{Ker } a_{M/N}^3 \subset \dots$$

стабилизируется, скажем, на  $a_{M/N}^r$ . Обозначим эндоморфизм

$$a_{M/N}^r: M/N \rightarrow M/N$$

через  $\varphi$ . Тогда  $\text{Ker } \varphi^2 = \text{Ker } \varphi$ . Следовательно,  $0 = \text{Ker } \varphi \cap \text{Im } \varphi$  и ни ядро, ни образ  $\varphi$  не равны 0. Веря прообраз в  $M$ , мы видим, что  $N$  есть пересечение двух подмодулей в  $M$ , не равных  $N$ . Из максимальности  $N$  заключаем, что каждый из этих подмодулей допускает примарное разложение, а потому и  $N$  допускает примарное разложение — противоречие.

Мы закончим наше рассмотрение установлением связи между простыми идеалами, принадлежащими примарному разложению, и ассоциированными простыми идеалами, обсуждавшимися в предыдущем параграфе.

**Предложение 13.** *Пусть  $A$  и  $M$  нётеровы. Подмодуль  $Q$  в  $M$  примарен тогда и только тогда, когда с  $M/Q$  ассоциируется в точности один простой идеал  $\mathfrak{p}$ ; в этом случае  $\mathfrak{p}$  соответствует  $Q$ , т. е.  $Q$   $\mathfrak{p}$ -примарен.*

**Доказательство.** Это непосредственное следствие определений и следствия предложения 10.

**Теорема 5.** *Пусть  $A$  и  $M$  нётеровы. Ассоциированные с модулем  $M$  простые идеалы — это в точности простые идеалы, соответствующие примарным модулям в несократимом примарном разложении 0 в  $M$ . В частности, множество ассоциированных с модулем  $M$  простых идеалов конечно.*

**Доказательство.** Пусть

$$0 = Q_1 \cap \dots \cap Q_r$$

— несократимое примарное разложение 0 в  $M$ . Имеет место инъективный гомоморфизм

$$M \rightarrow \coprod_{i=1}^r M/Q_i.$$

В силу предложения 11 из § 4 и предложения 13 мы заключаем, что всякий ассоциированный с  $M$  простой идеал соответствует некоторому  $Q_i$ . Обратно, пусть  $N = Q_2 \cap \dots \cap Q_r$ . Тогда  $N \neq 0$ , поскольку наше разложение несократимо. Имеем

$$N = N/(N \cap Q_1) \approx (N + Q_1)/Q_1 \subset M/Q_1.$$

Итак,  $N$  изоморфен подмодулю в  $M/Q_1$  и, следовательно, обладает ассоциированным простым идеалом, который не может быть ничем иным, как простым идеалом  $\mathfrak{p}_1$ , соответствующим  $Q_1$ . Это доказывает нашу теорему.

## УПРАЖНЕНИЯ

*Во всех упражнениях „кольцо“ означает „коммутативное кольцо“.*

1. Пусть  $A$  — кольцо,  $\mathfrak{a}$  — идеал, содержащийся во всяком максимальном идеале, и  $B$  — конечно порожденный  $A$ -модуль. Если  $\mathfrak{a}E = E$ , то  $E = 0$ . [Указание: индукция по числу образующих. Выразить одну образующую через другие, используя тот факт, что  $1 + \mathfrak{a}$  есть единица при  $a \in \mathfrak{a}$ . См. лемму Накаямы в гл. IX.] Это утверждение применимо, в частности, к случаю, когда  $A = \mathfrak{o}$  — локальное кольцо и  $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$  — его максимальный идеал. Получить следующие два утверждения в качестве следствий:

*Пусть  $E$  — конечно порожденный  $\mathfrak{o}$ -модуль и  $F$  — его подмодуль. Если  $E = F + \mathfrak{m}E$ , то  $E = F$ .*

*Если  $x_1, \dots, x_n$  — образующие для  $\mathfrak{m}$  mod  $\mathfrak{m}^2$ , то они служат образующими для  $\mathfrak{m}$  над  $\mathfrak{o}$ .*

2. (Артин — Рис) Пусть  $A$  — нётерово кольцо,  $\mathfrak{a}$  — идеал,  $E$  — конечно порожденный модуль и  $F$  — подмодуль. Тогда существует целое число  $s \geq 0$ , такое, что для всех  $n \geq s$  имеем  $\mathfrak{a}^n E \cap F = \mathfrak{a}^{n-s} (\mathfrak{a}^s E \cap F)$ . [Указание: пусть  $A_t = A[t]$  и  $A'_t = A[\mathfrak{a}t] = \prod_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n t^n$ . Если  $a_1, \dots, a_m$  — образующие идеала  $\mathfrak{a}$ , то  $a_1 t, \dots, a_m t$  — образующие кольца  $A'_t$ , которое поэтому нётерово. Определить очевидным способом  $E_t$  как  $A_t$ -модуль  $\prod t^n E$  и аналогично определить  $F_t$ . Пусть  $E'_t = A'_t E_t = \prod \mathfrak{a}^n t^n E$ . Тогда  $E'_t$  — конечно порожденный  $A'_t$ -модуль и  $E'_t \cap F_t$  имеет конечное число образующих, включающих лишь конечное число степеней  $t$ . Пусть  $t^s$  — наибольшая из них; тогда

$$\prod_{n=0}^{\infty} t^n (\mathfrak{a}^n E \cap F) = E'_t \cap F_t = A'_t \prod_{v=0}^s t^v (\mathfrak{a}^v E \cap F).$$

Сравнение коэффициентов при  $t^n$  для  $n \geq s$  дает

$$\mathfrak{a}^n E \cap F = \prod_{v=0}^s \mathfrak{a}^{n-v} (\mathfrak{a}^v E \cap F),$$

откуда немедленно следует искомый результат.]

3. (Крull) В условиях предыдущего упражнения предположим, что  $\mathfrak{a}$  содержится во всяком максимальном идеале кольца  $A$ . Тогда  $\prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n E = 0$ . [Указание: положить  $F = \prod \mathfrak{a}^n E$  и применить лемму Накаямы.] В частности, пусть  $\mathfrak{o}$  — нётерово локальное кольцо и  $\mathfrak{m}$  — его максимальный идеал. Тогда

$$\prod_{v=1}^{\infty} \mathfrak{m}^v = 0.$$

4. Пусть  $A$  — коммутативное кольцо,  $M$  — модуль,  $N$  — подмодуль и  $N = Q_1 \cap \dots \cap Q_r$  — его примарное разложение. Положим  $\bar{Q}_i = Q_i/N$ . Показать, что  $0 = \bar{Q}_1 \cap \dots \cap \bar{Q}_r$  — примарное разложение  $0$  в  $M/N$ . Сформулировать и доказать обратное утверждение.

5. Пусть  $\mathfrak{p}$  — простой идеал и  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  — идеалы в  $A$ . Показать, что если  $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{p}$ , то  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$  или  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ .

6. Пусть  $\mathfrak{q}$  — примарный идеал, и пусть  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  — идеалы, удовлетворяющие условию  $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{q}$ . Предположим, что идеал  $\mathfrak{b}$  конечно порожден. Показать, что либо  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$ , либо существует положительное целое число  $n$ , такое, что  $\mathfrak{b}^n \subset \mathfrak{q}$ .

7. Пусть  $A$  — нётерово кольцо и  $\mathfrak{q}$  —  $\mathfrak{p}$ -примарный идеал. Показать, что существует  $n \geq 1$ , такое, что  $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{q}$ .

8. Пусть  $A$  — произвольное коммутативное кольцо,  $S$  — мультиплективное подмножество,  $\mathfrak{p}$  — простой идеал и  $\mathfrak{q}$  —  $\mathfrak{p}$ -примарный идеал. Тогда  $\mathfrak{p}$  пересекает  $S$  в том и только в том случае, если  $\mathfrak{q}$  пересекает  $S$ . Кроме того, если  $\mathfrak{q}$  не пересекает  $S$ , то  $S^{-1}\mathfrak{q}$  будет  $S^{-1}$   $\mathfrak{p}$ -примарным идеалом в  $S^{-1}A$ .

9. Пусть  $\mathfrak{a}_S = S^{-1}\mathfrak{a}$ , где  $\mathfrak{a}$  — идеал в  $A$ . Если  $\varphi_S: A \rightarrow S^{-1}A$  — каноническое отображение, то  $\varphi_S^{-1}(\mathfrak{a}_S)$  сокращенно обозначаем через  $\mathfrak{a}_S \cap A$ , хотя бы  $\varphi_S$  и не было инъективным. Показать, что между простыми идеалами из  $A$ , не пересекающимися с  $S$ , и простыми идеалами из  $S^{-1}A$  существует взаимно однозначное соответствие

$$\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}_S \text{ и } \mathfrak{p}_S \mapsto \mathfrak{p}_S \cap A = \mathfrak{p}.$$

Доказать аналогичное утверждение с заменой простых идеалов на примарные.

10. Пусть  $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$  — несократимое примарное разложение идеала. Предположим, что  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_i$  не пересекают  $S$ , а  $\mathfrak{q}_j$  при  $j > i$  пересекают  $S$ . Показать, что

$$\mathfrak{a}_S = \mathfrak{q}_{1S} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_{iS}$$

— несократимое примарное разложение идеала  $\mathfrak{a}_S$ .

11. Предположим, что кольцо  $A$  нётерово. Показать, что множество делителей нуля в  $A$  является теоретико-множественным объединением всех простых идеалов, соответствующих примарным идеалам в несократимом примарном разложении  $0$ .