ности бесконечен. Утверждение о мощности в бесконечном случае предоставляется читателю в качестве упражнения. Мы также оставляем в качестве упражнения утверждение о том, что всякое множество алгебраически независимых элементов может быть дополнено до базиса трансцендентности, выбранного из данного множества образующих. (Читатель отметит полную аналогию этих утверждений с соответствующими утверждениями о линейных базисах.)

§ 2. Теорема Гильберта о нулях

Теорема о нулях является специальным случаем теоремы о продолжении гомоморфизмов, относящимся к конечно порожденным кольцам над полями.

Теорема 2. *Пусть k — поле, $k[x]=k[x_1, \ldots, x_n]$ — конечно порожденное кольцо над k и φ: $k \to L$ — вложение k в некоторое алгебраически замкнутое поле L. Тогда существует продолжение φ до гомоморфизма $k[x]$ в L.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый максимальный идеал в $k[x]$, σ — канонический гомоморфизм σ: $k[x] \to k[x]/\mathfrak{M}$. Тогда $\sigma k[\sigma x_1, \ldots, \sigma x_n]$ — поле, являющееся расширением поля σk. Если мы сможем доказать нашу теорему для случая, когда конечно порожденное кольцо является в действительности полем, то мы рассмотрим тогда ограничение $\varphi \circ \sigma^{-1}$ на σk и продолжим его до гомоморфизма $\sigma k[\sigma x_1, \ldots, \sigma x_n]$ в L, что и даст нам искомое продолжение для φ.

Не теряя поэтому общности, мы предполагаем, что $k[x]$ — поле. Если оно алгебраично над k, то все доказано (в силу известного результата для алгебраических расширений). В противном случае пусть $t_1, \ldots, t_r$ — некоторый базис трансцендентности, $r \geqslant 1$. Не теряя общности, мы можем считать, что φ тождественно на k. Каждый элемент $x_1, \ldots, x_n$ алгебраичен над $k(t_1, \ldots, t_r)$. Умножив неприводимый многочлен $\operatorname{Irr}(x_i, k(t), X)$ на подходящий ненулевой элемент из $k[t]$, мы получим многочлен, все коэффициенты которого лежат в $k[t]$. Пусть $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ — множество старших коэффициентов этих многочленов и $a(t)$ — их произведение

$$a(t)=a_1(t) \ldots a_n(t).$$

Так как $a(t) \neq 0$, то существуют такие элементы $t_1', \ldots, t_r' \in \bar{k}$, что $a(t') \neq 0$ и, следовательно, $a_i(t') \neq 0$ ни для какого i.

Каждый элемент x_i является целым над кольцом

$$k\left[t_1, \ldots, t_r, \frac{1}{a_1(t)}, \ldots, \frac{1}{a_r(t)}\right].$$

Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi\colon k[t_1, \ldots, t_r] \to \bar{k},$$

который тождествен на k и для которого $\varphi(t_j) = t'_j$. Пусть $\mathfrak{p}$ — его ядро. Тогда $a(t) \notin \mathfrak{p}$. Наш гомоморфизм φ однозначно продолжается на локальное кольцо $k[t]_{\mathfrak{p}}$, а в силу предыдущих замечаний он продолжается до гомоморфизма

$$k[t]_{\mathfrak{p}}[x_1, \ldots, x_n]$$

в $\bar{k}$, согласно предложению 16 из гл. IX, § 2. Это доказывает требуемое утверждение.

Следствие 1. *Пусть k — поле и $k[x_1, \ldots, x_n] = k[x]$ — конечно порожденное кольцо над k. Если $k[x]$ — поле, то $k[x]$ алгебраично над k.*

Доказательство. Все гомоморфизмы поля являются изоморфизмами (на образ), и существует гомоморфизм $k[x]$ над k в алгебраическое замыкание поля k.

Следствие 2. *Пусть $k[x_1, \ldots, x_n]$ — конечно порожденное целостное кольцо над полем k, и пусть $y_1, \ldots, y_m$ — ненулевые элементы этого кольца. Тогда существует такой гомоморфизм*

$$\psi\colon k[x] \to \bar{k}$$

над k, что $\psi(y_j) \neq 0$ ни для одного $j = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Рассмотрим кольцо $k[x_1, \ldots, x_n, y_1^{-1}, \ldots, y_m^{-1}]$ и применим к нему теорему.

Пусть S — некоторое множество многочленов в кольце многочленов $k[X_1, \ldots, X_n]$ от n переменных, L — некоторое расширение поля k. Под *нулем* множества S в L понимают любой набор из n элементов $(c_1, \ldots, c_n)$, лежащих в L, такой, что

$$f(c_1, \ldots, c_n) = 0$$

для всех $f \in S$. Если S состоит из одного многочлена f, то мы будем также говорить, что (c) есть нуль f. Множество всех нулей семейства S называется *алгебраическим множеством* в L (или, точнее, в $L^{(n)}$). Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал, порожденный всеми элементами из S. Поскольку $S \subset \mathfrak{a}$, ясно, что всякий нуль $\mathfrak{a}$ служит также нулем S. Однако, очевидно, справедливо и обратное, а именно всякий нуль S является также нулем $\mathfrak{a}$, поскольку всякий элемент из $\mathfrak{a}$ имеет вид

$$g_1(X) f_1(X) + \ldots + g_m(X) f_m(X),$$

где $f_j \in S$, а $g_i \in k[X]$. Таким образом, рассматривая нули какого-либо множества S, мы всегда можем считать их нулями некоторого идеала. Отметим кстати, что любое алгебраическое множество будет множеством нулей некоторого конечного числа многочленов, так как всякий идеал в $k[X]$ конечно порожден (гл. VI). Еще одним следствием теоремы 2 является

Теорема Гильберта о нулях. *Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в $k[X] = k[X_1, \ldots, X_n]$, и пусть всякий его нуль $(c) = (c_1, \ldots, c_n)$ в $\bar{k}^{(n)}$ будет также нулем многочлена $f \in k[X]$: $f(c) = 0$ Тогда существует целое число $m \geqslant 0$, для которого $f^m \in \mathfrak{a}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{a}$ — само кольцо многочленов, то наше утверждение очевидно. Пусть $\mathfrak{a} \neq k[X]$. Предположим, что никакая степень f^m многочлена f не лежит в $\mathfrak{a}$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Обозначим через S мультипликативное множество всех степеней f и через $\mathfrak{p}$ — максимальный элемент в множестве идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$, пересечение которых с S пусто. Тогда $\mathfrak{p}$ — простой идеал, согласно предложению 6 из гл. VI, § 4. Имеет место изоморфизм

$$k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{p} \approx k[x_1, \ldots, x_n],$$

и так как $f \notin \mathfrak{p}$, то $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Пусть

$$\varphi\colon k[x] \to \bar{k}$$

— гомоморфизм над k, для которого $\varphi(f(x)) \neq 0$. Тогда $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$, где $\varphi(x) = (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$. Это противоречит предположению, что f обращается в нуль на всех алгебраических нулях идеала $\mathfrak{a}$.

§ 3. Алгебраические множества

Мы ограничимся несколькими самыми элементарными замечаниями об алгебраических множествах. Пусть k — поле, A — алгебраическое множество нулей в некотором фиксированном алгебраически замкнутом расширении этого поля. Множество всех многочленов $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, таких, что $f(x) = 0$ для всех $(x) \in A$, является, очевидно, идеалом $\mathfrak{a}$ в $k[X]$, и этот идеал определяется множеством A Мы будем называть его идеалом, *принадлежащим* A, или же говорить, что он *ассоциирован* с A. Если A — множество нулей множества многочленов S, то $S \subset \mathfrak{a}$, причем $\mathfrak{a}$ может быть больше, чем S. С другой стороны, заметим, что A есть также множество нулей идеала $\mathfrak{a}$.

Пусть A, B — алгебраические множества, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — их ассоциированные идеалы. Тогда ясно, что $A \subset B$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$. Следовательно, $A = B$ в точности тогда, когда $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Это приводит к важному следствию. Поскольку кольцо многочленов