где $f_j \in S$, а $g_i \in k[X]$. Таким образом, рассматривая нули какого-либо множества S, мы всегда можем считать их нулями некоторого идеала. Отметим кстати, что любое алгебраическое множество будет множеством нулей некоторого конечного числа многочленов, так как всякий идеал в $k[X]$ конечно порожден (гл. VI). Еще одним следствием теоремы 2 является

Теорема Гильберта о нулях. *Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в $k[X] = k[X_1, \ldots, X_n]$, и пусть всякий его нуль $(c) = (c_1, \ldots, c_n)$ в $\bar{k}^{(n)}$ будет также нулем многочлена $f \in k[X]$: $f(c) = 0$ Тогда существует целое число $m \geqslant 0$, для которого $f^m \in \mathfrak{a}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{a}$ — само кольцо многочленов, то наше утверждение очевидно. Пусть $\mathfrak{a} \neq k[X]$. Предположим, что никакая степень f^m многочлена f не лежит в $\mathfrak{a}$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Обозначим через S мультипликативное множество всех степеней f и через $\mathfrak{p}$ — максимальный элемент в множестве идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$, пересечение которых с S пусто. Тогда $\mathfrak{p}$ — простой идеал, согласно предложению 6 из гл. VI, § 4. Имеет место изоморфизм

$$k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{p} \approx k[x_1, \ldots, x_n],$$

и так как $f \notin \mathfrak{p}$, то $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Пусть

$$\varphi\colon k[x] \to \bar{k}$$

— гомоморфизм над k, для которого $\varphi(f(x)) \neq 0$. Тогда $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$, где $\varphi(x) = (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$. Это противоречит предположению, что f обращается в нуль на всех алгебраических нулях идеала $\mathfrak{a}$.

§ 3. Алгебраические множества

Мы ограничимся несколькими самыми элементарными замечаниями об алгебраических множествах. Пусть k — поле, A — алгебраическое множество нулей в некотором фиксированном алгебраически замкнутом расширении этого поля. Множество всех многочленов $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, таких, что $f(x) = 0$ для всех $(x) \in A$, является, очевидно, идеалом $\mathfrak{a}$ в $k[X]$, и этот идеал определяется множеством A Мы будем называть его идеалом, *принадлежащим* A, или же говорить, что он *ассоциирован* с A. Если A — множество нулей множества многочленов S, то $S \subset \mathfrak{a}$, причем $\mathfrak{a}$ может быть больше, чем S. С другой стороны, заметим, что A есть также множество нулей идеала $\mathfrak{a}$.

Пусть A, B — алгебраические множества, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — их ассоциированные идеалы. Тогда ясно, что $A \subset B$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$. Следовательно, $A = B$ в точности тогда, когда $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Это приводит к важному следствию. Поскольку кольцо многочленов

$k[X]$ нётерово, то алгебраические множества удовлетворяют дуальному свойству, а именно во всякой убывающей последовательности алгебраических множеств

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots$$

обязательно $A_m = A_{m+1} = \ldots$ для некоторого целого m, т. е. все A_ν равны при $\nu \geqslant m$. Кроме того, по двойственности к другому свойству, характеризующему условие нётеровости, заключаем, что всякое непустое множество алгебраических множеств содержит минимальный элемент.

Теорема 3. *Конечное объединение и конечное пересечение алгебраических множеств являются алгебраическими множествами. Если A, B — алгебраические множества нулей идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ соответственно, то $A \cup B$ будет множеством нулей идеала $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, а $A \cap B$ — множеством нулей идеала* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Доказательство. Рассмотрим сначала $A \cup B$. Пусть $(x) \in A \cup B$. Тогда (x) есть нуль идеала $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Обратно, пусть (x) — нуль идеала $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, причем $(x) \notin A$. Тогда существует многочлен $f \in \mathfrak{a}$, такой, что $f(x) \neq 0$. Но $(f)\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ и, следовательно, $(fg)(x) = 0$ для всех $g \in \mathfrak{b}$, откуда $g(x) = 0$ для всех $g \in \mathfrak{b}$. Следовательно, (x) лежит в B и $A \cup B$ есть алгебраическое множество нулей идеала $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Чтобы доказать, что $A \cap B$ — алгебраическое множество, возьмем $(x) \in A \cap B$. Тогда (x) будет нулем идеала $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Обратно, пусть (x) — нуль идеала $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Тогда, очевидно, $(x) \in A \cap B$, что и требовалось. Это доказывает нашу теорему.

Алгебраическое множество V называется ***k*-неприводимым**, если оно не может быть представлено в виде объединения $V = A \cup B$ алгебраических множеств A, B, где A, B отличны от V. Мы будем иногда говорить „неприводимое“ вместо „k-неприводимое“.

Теорема 4. *Всякое алгебраическое множество A может быть представлено в виде конечного объединения неприводимых алгебраических множеств*

$$A = V_1 \cup \ldots \cup V_r.$$

Если между V_i нет включений, т. е. если $V_i \not\subset V_j$ при $i \neq j$, то это представление единственно.

Доказательство. Сначала докажем существование. Предположим, что множество алгебраических множеств, которые не могут быть представлены в виде конечного объединения неприводимых алгебраических множеств, не пусто. Пусть V — минимальный элемент в нем. Тогда V не может быть неприводимым, и мы можем записать

$V = A \cup B$, где A, B — алгебраические множества, причем $A \neq V$ и $B \neq V$. Так как каждое из A, B строго меньше, чем V, то мы можем представить A, B в виде конечных объединений неприводимых алгебраических множеств, получив, таким образом, представление и для V, — противоречие.

Что касается единственности, то пусть

$$A = V_1 \cup \ldots \cup V_r = W_1 \cup \ldots \cup W_s$$

— два представления A в виде объединения неприводимых алгебраических множеств без включений. Каждое W_j мы можем записать в виде

$$W_j = (W_j \cap V_1) \cup \ldots \cup (W_j \cap V_r).$$

Так как множество $W_j \cap V_i$ — алгебраическое, то $W_j = W_j \cap V_i$ для некоторого i. Следовательно, $W_j \subset V_i$ для некоторого i. Аналогично V_i содержится в некотором W_ν. Поскольку между W_j нет включений, мы должны иметь $W_j = V_i = W_\nu$. Наше рассуждение может быть проведено для каждого W_j и каждого V_i. Это доказывает, что каждое W_j встречается среди V_i и каждое V_i — среди W_j, откуда и вытекает единственность представления.

В качестве упражнения докажите, что тогда и только тогда алгебраическое множество неприводимо, когда его ассоциированный идеал простой. Неприводимое алгебраическое множество обычно называют *многообразием*.

Понятие алгебраического множества может быть следующим образом обобщено на произвольные (коммутативные) кольца.

Пусть A—коммутативное кольцо. Под *спектром* $\operatorname{spec}(A)$ мы будем понимать множество простых идеалов в A. Подмножество C в $\operatorname{spec}(A)$ называется *замкнутым*, если существует идеал $\mathfrak{a}$ кольца A, такой, что C состоит из всех простых идеалов $\mathfrak{p}$, для которых $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Дополнение к замкнутому подмножеству в $\operatorname{spec}(A)$ называется *открытым* подмножеством в $\operatorname{spec}(A)$. Следующие утверждения легко проверяются, и их проверка предоставляется читателю.

Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто. Пересечение произвольного семейства замкнутых множеств замкнуто.

Пересечение конечного числа открытых множеств открыто. Объединение произвольного семейства открытых множеств открыто.

Пустое множество и все множество $\operatorname{spec}(A)$ *одновременно и открыты, и замкнуты.*

Для всякого подмножества S в A множество простых идеалов $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(A)$, таких, что $S \subset \mathfrak{p}$, совпадает с множеством простых идеалов $\mathfrak{p}$, содержащих идеал, порожденный S.

Пусть $f \in A$. Мы можем рассматривать множество простых идеалов из $\operatorname{spec}(A)$, содержащих f, как множество нулей элемента f. Действительно, это есть множество таких $\mathfrak{p}$, для которых образом f при каноническом гомоморфизме

$$A \to A/\mathfrak{p}$$

служит 0.

Пусть A, B — кольца и φ: $A \to B$ — гомоморфизм. Тогда φ индуцирует отображение

$$\operatorname{spec}(\varphi) = \varphi^{-1}\colon \operatorname{spec}(B) \to \operatorname{spec}(A)$$

по правилу

$$\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}).$$

Читатель тотчас проверит, что отображение $\operatorname{spec}(\varphi)$ непрерывно в том смысле, что если U — открытое множество в $\operatorname{spec}(B)$, то $\varphi^{-1}(U)$ открыто в $\operatorname{spec}(A)$.

Мы можем рассматривать spec как функтор из категории коммутативных колец в категорию топологических пространств. Топология, которую мы определили выше на множества $\operatorname{spec}(A)$, называется *топологией Зарисского.*

Под *точкой* из $\operatorname{spec}(A)$ в поле L понимается отображение

$$\operatorname{spec}(\varphi)\colon \operatorname{spec}(L) \to \operatorname{spec}(A),$$

индуцированное некоторым гомоморфизмом φ: $A \to L$ кольца A в L.

Например, каждому простому числу p соответствует точка из $\operatorname{spec}(\mathbf{Z})$, а именно точка, определяемая отображением редукции

$$\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}.$$

Соответствующая точка задается обращенной стрелкой

$$\operatorname{spec}(\mathbf{Z}) \leftarrow \operatorname{spec}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}).$$

В качестве другого примера рассмотрим кольцо многочленов $k[X_1, \ldots, X_n]$ над полем k. Для всякого n-набора $(c_1, \ldots, c_n)$ из $\overline{k}^{(n)}$ имеем гомоморфизм

$$\varphi\colon k[X_1, \ldots, X_n] \to \overline{k},$$

такой, что φ тождествен на k и $\varphi(X_i) = c_i$ для всех i. Соответствующая точка задается обращенной стрелкой

$$\operatorname{spec}(k[X]) \leftarrow \operatorname{spec}(\overline{k}).$$

Таким образом, мы можем отождествлять точки из n-пространства $\overline{k}^{(n)}$ с точками из $\operatorname{spec}(k[X])$ (над k) в $\overline{k}$.

Обобщением понятия алгебраического множества, определенного нами выше, служит понятие замкнутого множества. В качестве упражнения предлагается доказать следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть A — нётерово кольцо. Тогда всякое замкнутое множество C в* spec(A) *может быть представлено как конечное объединение неприводимых замкнутых множеств, причем это представление единственно, если в объединении*

$$C = V_1 \cup \ldots \cup V_r$$

неприводимых замкнутых множеств включений $V_i \subset V_j$ при $i \neq j$ нет.

Разумеется, под неприводимым замкнутым множеством мы понимаем такое замкнутое множество, которое не может быть представлено в виде собственного объединения двух замкнутых множеств.

§ 4. Теорема Нётера о нормализации

Теорема 6. *Пусть $k[x_1, \ldots, x_n] = k[x]$ — конечно порожденное целостное кольцо над полем k, причем $k(x)$ имеет степень трансцендентности r. Тогда в $k[x]$ существуют элементы $y_1, \ldots, y_r$, такие, что кольцо $k[x]$ — целое над*

$$k[y] = k[y_1, \ldots, y_r].$$

Доказательство. Если $(x_1, \ldots, x_n)$ уже алгебраически независимы над k, то все доказано. Если нет, то имеется нетривиальное соотношение

$$\sum a_{(j)} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} = 0,$$

в котором каждый коэффициент $a_{(j)} \in k$ и $a_{(j)} \neq 0$. Сумма берется по конечному числу различных n-наборов целых чисел $(j_1, \ldots, j_n)$, $j_\nu \geqslant 0$. Пусть $m_2, \ldots, m_n$ — целые положительные числа. Положим

$$y_2 = x_2 - x_1^{m_2}, \ \ldots, \ y_n = x_n - x_1^{m_n}$$

и подставим $x_i = y_i + x_1^{m_i}$ $(i = 2, \ldots, n)$ в предыдущее уравнение. Используя векторные обозначения, положим $(m) = (1, m_2, \ldots, m_n)$ и введем скалярное произведение $(j) \cdot (m) = j_1 + m_2 j_2 + \ldots + m_n j_n$. Развернув соотношение после указанной подстановки, получим

$$\sum a_{(j)} x_1^{(j)\cdot(m)} + f(x_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$

где f — многочлен, в котором не встречаются чистые степени x_1. Выберем теперь целое число d достаточно большим [скажем, большим, чем любая компонента вектора (j), для которого $a_{(j)} \neq 0$] и возьмем

$$m = (1, d, d^2, \ldots, d^{n-1}).$$

Тогда все $(j) \cdot (m)$ различны для тех (j), для которых $a_{(j)} \neq 0$. Тем самым мы получаем целое уравнение для x_1 над $k[y_2, \ldots, y_n]$.