Так как каждый из x_i $(i > 1)$ содержится в $k[x_1, y_2, \ldots, y_n]$, то кольцо $k[x]$ — целое над $k[y_2, \ldots, y_n]$. Мы можем теперь продолжать по индукции и, используя транзитивность целых расширений, уменьшать число игреков до тех пор, пока не дойдем до алгебраически независимого множества игреков.

§ 5. *Линейно свободные расширения*

В этом параграфе мы обсудим вопрос о том, каким образом два расширения K и L поля k ведут себя по отношению друг к другу. Мы будем считать, что все рассматриваемые поля содержатся в одном алгебраически замкнутом поле Ω.

Расширение K называется *линейно свободным*[1]) *от* L *над* k, если всякое конечное множество элементов из K, линейно независимое над k, линейно независимо и над L.

Это определение несимметрично, но на самом деле, как мы сейчас докажем, свойство быть линейно свободным симметрично относительно K и L. Предположим, что K линейно свободно от L над k. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — элементы из L, линейно независимые над k. Допустим, что имеется нетривиальное соотношение линейной зависимости над K

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0. \tag{1}$$

Пусть, скажем, $x_1, \ldots, x_r$ линейно независимы над k, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ являются их линейными комбинациями $x_i = \sum_{\mu=1}^{r} a_{i\mu}x_\mu$, $i = r+1, \ldots, n$. Перепишем соотношение (1) в виде

$$\sum_{\mu=1}^{r} x_\mu y_\mu + \sum_{i=r+1}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{r} a_{i\mu}x_\mu\right) y_i = 0$$

и, собрав члены после раскрытия скобок во второй сумме, получим

$$\sum_{\mu=1}^{r} \left(y_\mu + \sum_{i=r+1}^{n} (a_{i\mu}y_i)\right) x_\mu = 0.$$

Поскольку игреки линейно независимы над k, коэффициенты при x_μ не равны 0. Это противоречит линейной свободе K от L над k.

Дадим теперь два критерия линейной свободы.

Критерий 1. Пусть K — поле частных кольца R и L — поле частных кольца S, $k \subset K \cap L$. Чтобы убедиться в том, что L и K линейно свободны над k, достаточно показать, что если элементы

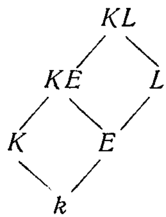
[1]) Или *линейно разделенным*. Алгебраически свободные поля (см. ниже) в равной мере называют также алгебраически разделенными. — *Прим. ред.*

$y_1, \ldots, y_n$ из S линейно независимы над k, то между ними нет линейных соотношений и над R. Действительно, если элементы $y_1, \ldots, y_n$ из L линейно независимы над k и если имеется соотношение $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = 0$ с $x_i \in K$, то мы можем выбрать y в S и x в R, такие, что $xy \neq 0$, $yy_i \in S$ для всех i и $xx_i \in R$ для всех i. Умножение нашего соотношения на xy дает линейную зависимость между элементами из R и S. Однако элементы yy_i, очевидно, линейно независимы над k, что и доказывает критерий.

Критерий 2. Пусть снова R — подкольцо в K, такое, что K есть его поле частных, и пусть R — векторное пространство над k с базисом $\{u_\alpha\}$. Чтобы доказать, что K и L линейно свободны над k, достаточно показать, что элементы $\{u_\alpha\}$ этого базиса линейно независимы и над L. Действительно, предположим, что это так. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — элементы из R, линейно независимые над k. Они лежат в конечномерном векторном пространстве, порожденном некоторыми из u_α, скажем $u_1, \ldots, u_n$, и могут быть дополнены до базиса этого пространства над k. При подъеме это n-мерное векторное пространство над L должно сохранить свою размерность, поскольку элементы u остаются по предположению линейно независимыми, а, следовательно, иксы также должны остаться линейно независимыми.

Следующее предложение дает полезный критерий, позволяющий устанавливать линейную свободу в башне полей:

Предложение 1. *Пусть K — поле, содержащее некоторое другое поле k, и $L \supset E$ — еще два расширения поля k. Тогда K и L линейно свободны над k в том и только в том случае, если K и E линейно свободны над k, а KE, L линейно свободны над E.*



Доказательство. Предположим сначала, что K, E линейно свободны над k и KE, L линейно свободны над E. Пусть $\{\varkappa\}$ — базис K как векторного пространства над k (мы используем сами элементы этого базиса в качестве их индексирующего множества), и пусть $\{\alpha\}$ — базис E над k, а $\{\lambda\}$ — базис L над E. Тогда $\{\alpha\lambda\}$ будет базисом L над k. Если K и L не являются линейно свободными над k, то существует соотношение

$$\sum_{\lambda, \alpha} \Big(\sum_{\varkappa} c_{\varkappa\lambda\alpha}\varkappa \Big) \lambda\alpha = 0 \quad \text{с какими-то} \quad c_{\varkappa\lambda\alpha} \neq 0, \quad c_{\varkappa\lambda\alpha} \in k.$$

Изменение порядка суммирования дает

$$\sum_{\lambda}\Bigl(\sum_{\varkappa,\,\alpha} c_{\varkappa\lambda\alpha}\varkappa\alpha\Bigr)\lambda = 0$$

вопреки линейной свободе L и KE над E.

Обратно, предположим, что K и L линейно свободны над k. Тогда тем более K и E линейно свободны над k. Поле KE есть поле частных кольца $E[K]$, порожденного над E всеми элементами из K. Это кольцо является векторным пространством над E, и базис K над k служит также базисом для кольца $E[K]$ над E. Из этого замечания и из критериев линейной свободы мы видим, что достаточно доказать, что элементы такого базиса остаются линейно независимыми над L. Но это вытекает из предположения, что K и L линейно свободны над k.

Введем еще одно понятие, касающееся двух расширений K и L поля k. Мы будем говорить, что K *алгебраически свободно от* L *над* k, если всякое конечное множество элементов из K, алгебраически независимое над k, алгебраически независимо и над L. Пусть (x) и (y) — два множества элементов из Ω. Мы будем говорить, что они *свободны над* k (или *алгебраически независимы над* k), если поля $k(x)$ и $k(y)$ алгебраически свободны над k.

Так же как и в случае линейной свободы, наше определение несимметрично; докажем, что в действительности выражаемое им отношение симметрично. Именно, предположим, что K алгебраически свободно от L над k. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — элементы из L, алгебраически независимые над k. Допустим, что они становятся зависимыми над K. Тогда они являются алгебраически зависимыми уже над некоторым подполем F в K, конечно порожденным над k и, скажем, имеющим степень трансцендентности r над k. Подсчет степени трансцендентности поля $F(y)$ над k двумя способами приводит к противоречию (см. упражнение 5):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F(y) & \\
F \arrow[ur, dash, "<n"] & & k(y) \arrow[ul, dash, "r"'] \\
 & k \arrow[ul, dash, "r"] \arrow[ur, dash, "n"'] &
\end{tikzcd}$$

Предложение 2. *Если K и L линейно свободны над k, то они алгебраически свободны над k.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — элементы из K, алгебраически независимые над k. Предположим, что они становятся алгебраически зависимыми над L. Имеем соотношение

$$\sum y_\alpha M_\alpha(x) = 0$$

между одночленами $M_\alpha(x)$ с коэффициентами y_α из L. Это—линейное соотношение между $M_\alpha(x)$. Но последние линейно независимы над k, так как иксы предполагаются алгебраически независимыми над k, — противоречие.

Предложение 3. *Пусть L — расширение поля k и $(u) = (u_1, \ldots, u_r)$ — множество алгебраически независимых величин над L. Тогда поле $k(u)$ линейно свободно от L над k.*

Доказательство. Согласно критериям линейной свободы, достаточно доказать, что элементы базиса кольца $k[u]$, которые линейно независимы над k, остаются линейно независимыми и над L. Но одночлены $M(u)$ дают базис $k[u]$ над k. Они должны остаться линейно независимыми над L, поскольку, как мы уже видели, линейное соотношение дает алгебраическое соотношение. Предложение доказано.

Отметим в заключение, что свойство двух расширений K и L поля k быть линейно свободными или алгебраически свободными является свойством конечного типа. Для доказательства того, что они обладают каким-либо из этих свойств, достаточно доказать это для всех подполей K_0 и L_0 в K и L соответственно, конечно порожденных над k. Это следует из того факта, что в определениях фигурирует только конечное число величин.

§ 6. Сепарабельные расширения

Пусть K — конечно порожденное расширение поля k, $K = k(x)$. Мы будем говорить, что оно *сепарабельно порождено*, если можно найти базис трансцендентности $(t_1, \ldots, t_r)$ поля K/k, такой, что K — сепарабельное алгебраическое расширение поля $k(t)$. Такой базис трансцендентности называется *сепарирующим базисом трансцендентности* для K над k.

Через p мы всегда будем обозначать характеристику поля, если она отлична от 0. Поле, получаемое из k присоединением корней p^m-й степени из всех элементов k, будет обозначаться через k^{1/p^m}. Композит всех этих полей по $m = 1, 2, \ldots$ обозначается символом k^{1/p^∞}.

Предложение 4. *Следующие условия, относящиеся к расширению K поля k, эквивалентны:*

(1) *K линейно свободно от k^{1/p^∞}.*

(2) *K линейно свободно от k^{1/p^m} для некоторого m.*