Глава XI

Вещественные поля

§ 1. Упорядоченные поля

Пусть K — поле. *Упорядочение* поля K — это подмножество P в K, обладающее следующими свойствами:

ПОР 1. Для всякого данного элемента $x \in K$ либо $x \in P$, либо $x = 0$, либо $-x \in P$, и эти три возможности взаимно исключают друг друга. Иными словами, K есть объединение попарно не пересекающихся множеств P, $\{0\}$ и $-P$.

ПОР 2. Если $x, y \in P$, то $x + y \in P$ и $xy \in P$.

Мы будем также говорить, что K *упорядочено* посредством P, и называть P множеством *положительных* элементов.

Пусть K упорядочено посредством P. Так как $1 \neq 0$ и $1 = 1^2 = (-1)^2$, то $1 \in P$. В силу ПОР 2 имеем $1 + \ldots + 1 \in P$, откуда вытекает, что K имеет характеристику 0. Если $x \in P$, то из $xx^{-1} = 1 \in P$ вытекает, что $x^{-1} \in P$.

Пусть $x, y \in K$. По определению $x < y$ (или $y > x$) означает, что $y - x \in P$. Если $x < 0$, т. е. элемент $-x$ положительный, то мы говорим, что элемент x *отрицательный*. Тривиально проверяется, что имеют место обычные соотношения для неравенств, например,

$$x < y \text{ и } \quad y < z \text{ влечет } \quad x < z,$$

$$x < y \text{ и } \quad z > 0 \text{ влечет } xz < yz,$$

$$x < y \text{ и } x, y > 0 \text{ влечет } 1/y < 1/x.$$

По определению $x \leqslant y$ означает, что $x < y$ или $x = y$. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Пусть K упорядочено. Для всякого $x \in K$, $x \neq 0$, элемент x^2 положителен, поскольку $x^2 = (-x)^2$ и либо $x \in P$, либо $-x \in P$. Таким образом, сумма квадратов положительна или равна 0.

Пусть E — поле. Тогда произведение сумм квадратов в E также будет суммой квадратов. Если $a, b \in E$ — суммы квадратов и $b \neq 0$, то a/b — сумма квадратов.

Первое утверждение очевидно, и второе — тоже, если принять во внимание равенство $a/b = ab(b^{-1})^2$.

Если E имеет характеристику $\neq 2$ и если -1 есть сумма квадратов, то всякий элемент $a \in E$ будет суммой квадратов, поскольку $4a = (1 + a)^2 - (1 - a)^2$.

Если K — поле с упорядочением P и F — подполе, то, очевидно, $P \cap F$ определяет упорядочение на F, называемое *индуцированным* упорядочением.

Отметим, что обе наши аксиомы ПОР 1 и ПОР 2 применимы и к кольцу. Если A — упорядоченное кольцо с $1 \neq 0$, то ясно, что A не может иметь делителей нуля и упорядочение кольца A можно очевидным образом продолжить на поле частных: дробь называется положительной, если она допускает запись в виде a/b, где $a, b \in A$ и $a, b > 0$. Тривиально проверяется, что тем самым действительно определено упорядочение на поле частных.

Пример. Определим упорядочение в кольце многочленов $\mathbf{R}[t]$ над полем вещественных чисел. Многочлен

$$f(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$$

с $a_n \neq 0$ будем считать положительным, если $a_n > 0$. Обе аксиомы тривиально проверяются. Отметим, что $t > a$ для всех $a \in \mathbf{R}$. Таким образом, элемент t *является бесконечно большим по отношению к* $\mathbf{R}$. Существование бесконечно больших (или бесконечно малых) элементов в упорядоченном поле — это основная черта, которой такое поле может отличаться от подполя поля вещественных чисел.

Сделаем несколько замечаний относительно этого явления, т. е. существования бесконечно больших элементов.

Пусть K — упорядоченное поле и F — его подполе с индуцированным упорядочением. Как обычно, полагаем $|x| = x$, если $x > 0$, и $|x| = -x$, если $x < 0$. Мы будем говорить, что элемент α из K *бесконечно большой* над F, если $|\alpha| > x$ для всех $x \in F$. Мы будем говорить, что этот элемент *бесконечно малый* над F, если $0 \leqslant |\alpha| < |x|$ для всех $x \in F$, $x \neq 0$. Мы видим, что элемент α является бесконечно большим тогда и только тогда, когда элемент α^{-1} бесконечно малый. Мы будем говорить, что K *архимедово* над F, если в K нет элементов, бесконечно больших над F. Промежуточное поле F_1, $K \supset F_1 \supset F$, называется *максимальным архимедовым полем над* F, если оно архимедово над F и никакое другое промежуточное поле, содержащее F_1, не является архимедовым над F. Если F_1 архимедово над F и F_2 архимедово над F_1, то F_2 архимедово над F. Следовательно, по лемме Цорна всегда существует максимальное архимедово подполе F_1 в K над F. Мы будем говорить, что F — *максимальное архимедово подполе* в K, если оно является максимальным архимедовым полем над собой в K.

Пусть K — упорядоченное поле и F — его подполе. Обозначим через $\mathfrak{o}$ множество элементов из K, не являющихся бесконечно большими над F. Ясно, что $\mathfrak{o}$ — кольцо, причем для любого $\alpha \in K$ будет либо $\alpha \in \mathfrak{o}$, либо $\alpha^{-1} \in \mathfrak{o}$. Следовательно, $\mathfrak{o}$ является так называемым *кольцом нормирования*, содержащим F. Обозначим через $\mathfrak{m}$ идеал, состоящий из всех $\alpha \in K$, бесконечно малых над F. Тогда $\mathfrak{m}$ — единственный максимальный идеал в $\mathfrak{o}$, поскольку любой элемент из $\mathfrak{o}$, не лежащий в $\mathfrak{m}$, имеет обратный в $\mathfrak{o}$. Мы будем называть $\mathfrak{o}$ *кольцом нормирования, определенным упорядочением расширения* K/F.

Предложение 1. *Пусть K — упорядоченное поле, F — его подполе, $\mathfrak{o}$ — кольцо нормирования, определенное упорядочением расширения K/F, и $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал. Тогда $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ — вещественное поле* (см. § 2).

Доказательство. В противном случае мы имели бы равенство

$$-1 = \sum \alpha_i^2 + a,$$

где $\alpha_i \in \mathfrak{o}$ и $a \in \mathfrak{m}$. Но поскольку сумма $\sum \alpha_i^2$ положительна, а элемент a бесконечно мал, это равенство, очевидно, невозможно.

§ 2. Вещественные поля

Поле K называется *вещественным*, если -1 не является суммой квадратов в K[1]). Поле K называется *вещественно замкнутым*, если оно вещественное и любое его вещественное алгебраическое расширение совпадает с K. Другими словами, K является максимальным по отношению к свойству вещественности алгебраических замыканий.

Предложение 2. *Пусть K — вещественное поле.*

(i) *Если $a \in K$, то либо $K(\sqrt{a})$, либо $K(\sqrt{-a})$ — вещественное поле. Если a — сумма квадратов в K, то поле $K(\sqrt{a})$ вещественное. Если поле $K(\sqrt{a})$ не является вещественным, то $-a$ есть сумма квадратов в K.*

(ii) *Если f — неприводимый многочлен нечетной степени n из $K[X]$ и α — корень f, то поле $K(\alpha)$ вещественное.*

Доказательство. Пусть $a \in K$. Если a — квадрат в K, то поле $K(\sqrt{a}) = K$ и, следовательно, является вещественным по условию. Предположим, что a не есть квадрат в K. Если поле $K(\sqrt{a})$ не вещественное, то существуют $b_i, c_i \in K$, такие, что

$$-1 = \sum (b_i + c_i \sqrt{a})^2 = \sum (b_i^2 + 2c_i b_i \sqrt{a} + c_i^2 a).$$

[1]) Принято говорить в таком случае о *формально вещественном* поле, но мы сохраним краткую терминологию автора, поскольку из контекста ясно, когда речь идет об обычном поле вещественных чисел. — *Прим. ред.*