Доказательство. Рассмотрим сначала два из наших абсолютных значений, скажем v_1 и v_s. По условию мы можем найти элемент $\alpha \in K$, такой, что $|\alpha|_1 < 1$ и $|\alpha|_s \geqslant 1$. Аналогично мы можем найти элемент $\beta \in K$, такой, что $|\beta|_1 \geqslant 1$ и $|\beta|_s < 1$. Положим $y = \beta/\alpha$. Тогда $|y|_1 > 1$ и $|y|_s < 1$.

Теперь докажем, что существует элемент $z \in K$, такой, что $|z|_1 > 1$ и $|z|_j < 1$ для $j = 2, \ldots, s$. Доказываем это по индукции. Случай $s = 2$ был только что рассмотрен. Предположим, что мы нашли элемент $z \in K$, удовлетворяющий условиям

$$|z|_1 > 1 \text{ и } |z|_j < 1 \quad \text{для} \quad j = 2, \ldots, s-1.$$

Если $|z|_s \leqslant 1$, то элемент $z^n y$ для достаточно большого n будет удовлетворять нашим требованиям.

Если $|z|_s > 1$, то последовательность

$$t_n = \frac{z^n}{1 + z^n}$$

стремится к 1 относительно v_1 и v_s и стремится к 0 относительно v_j $(j = 2, \ldots, s-1)$. Ясно, что при достаточно большом n элемент $t_n y$ удовлетворяет нашим требованиям.

Используя только что построенный элемент z, мы видим, что последовательность $z^n/(1 + z^n)$ стремится к 1 относительно v_1 и к 0 относительно v_j для $j = 2, \ldots, s$. Поэтому для всякого i мы можем построить элемент z_i, который очень близок к 1 относительно v_i и очень близок к 0 относительно v_j $(j \neq i)$. Тогда элемент

$$x = z_1 x_1 + \ldots + z_s x_s$$

удовлетворяет требованиям теоремы.

§ 2. Пополнения

Пусть K — поле с нетривиальным абсолютным значением v, которое во всем этом параграфе будет оставаться фиксированным. Обычным способом можно определить понятие *последовательности Коши*. Это такая последовательность $\{x_n\}$ элементов из K, что для заданного $\varepsilon > 0$ существует целое число N, такое, что для всех $n, m > N$ имеем

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Мы будем говорить, что поле K *полное*, если всякая последовательность Коши сходится.

Предложение 2. *Существует пара (K_v, i), состоящая из поля K_v, полного относительно некоторого абсолютного значения,*

и вложения i: $K \to K_v$, такого, что абсолютное значение на K индуцируется абсолютным значением на K_v (т. е. $|x|_v = |ix|$ для $x \in K$). При этом iK плотно в K_v. Если (K'_v, i') — другая такая пара, то существует однозначно определенный изоморфизм φ: $K_v \to K'_v$, сохраняющий абсолютные значения, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} K_v \arrow[rr, "\varphi"] & & K'_v \\ & K \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Единственность очевидна. Существование доказывается хорошо известным способом, который мы сейчас кратко напомним, предоставив детали читателю.

Последовательности Коши образуют кольцо, сложение и умножение в котором производятся покомпонентно.

Определяется нуль-последовательность как последовательность $\{x_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Нуль-последовательности образуют идеал в кольце последовательностей Коши, который на самом деле является максимальным идеалом. (Если последовательность Коши не является нуль-последовательностью, то для всех достаточно больших n ее члены отличны от 0 и для почти всех ее членов можно взять обратные элементы. С точностью до конечного числа членов снова получаем последовательность Коши.)

Поле классов вычетов кольца последовательностей Коши по модулю нуль-последовательностей и есть поле K_v. Мы вкладываем K в K_v „по диагонали", т. е. сопоставляем элементу $x \in K$ последовательность $(x, x, x, \ldots)$.

Абсолютное значение на K продолжаем на K_v по непрерывности. Если $\{x_n\}$ — последовательность Коши, представляющая элемент ξ из K_v, то полагаем $|\xi| = \lim |x_n|$. Легко доказывается, что так определенное абсолютное значение не зависит от выбора представляющей последовательности $\{x_n\}$ для ξ и индуцирует заданное абсолютное значение на K.

Наконец, доказывается, что поле K_v — полное. Это делается обычным диагональным процессом. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность Коши в K_v и ξ_j представляется последовательностью Коши $\{x_{jn}\}$ из K, то без всякого труда доказывается, что

$$x_{11},\ x_{22},\ x_{33},\ \ldots$$

будет последовательностью Коши в K, представляющей элемент ξ из K_v, для которого

$$\lim_{j\to\infty} \xi_j = \xi.$$

Пара (K_v, i), фигурирующая в предложении 2, может быть названа *некоторым пополнением* K. Стандартная пара, полученная с помощью предыдущей конструкции, могла бы быть названа (просто) *пополнением* K.

Пусть поле K снабжено некоторым нетривиальным архимедовым абсолютным значением v. Если известно, что ограничение v на подполе рациональных чисел зависимо от обычного абсолютного значения, то пополнение K_v является полным полем, содержащим пополнение поля $\mathbf{Q}$ в качестве замкнутого подполя, т. е. содержащим в качестве замкнутого подполя поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Стоит привести теорему Гельфанда — Мазура, касающуюся структуры таких полей. Но сначала введем понятие нормированного векторного пространства.

Пусть K — поле с нетривиальным абсолютным значением и E — векторное пространство над K. Под *нормой* на E (согласованной с абсолютным значением на K) мы будем понимать функцию $\xi \longmapsto |\xi|$, отображающую E в поле вещественных чисел, такую, что

НО 1. $|\xi| \geqslant 0$ для всех $\xi \in E$, и $|\xi| = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

НО 2. $|x\xi| \leqslant |x||\xi|$ для всех $x \in K$ и $\xi \in E$.

НО 3. Если $\xi, \xi' \in E$, то $|\xi + \xi'| \leqslant |\xi| + |\xi'|$. Две нормы $|\ |_1$ и $|\ |_2$ называются *эквивалентными*, если существуют числа C_1, $C_2 > 0$, такие, что для всех $\xi \in E$ имеют место неравенства

$$C_1 |\xi|_1 \leqslant |\xi|_2 \leqslant C_2 |\xi|_1.$$

Предположим, что пространство E конечномерно с базисом $\omega_1, \ldots, \omega_n$ над K. Имея выражения

$$\xi = x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n, \qquad x_i \in K$$

элементов $\xi \in E$ через этот базис, мы можем определить норму, положив

$$|\xi| = \max_i |x_i|.$$

Три свойства, определяющих норму, тривиально проверяются.

Предложение 3. *Пусть K — поле, полное относительно некоторого нетривиального абсолютного значения, E — конечномерное пространство над K. Любые две нормы на E (согласованные с заданным абсолютным значением на K) эквивалентны.*

Доказательство. Докажем сначала, что топология на E является топологией прямого произведения, т. е. что если $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — базис E над K, то последовательность

$$\xi^{(\nu)} = x_1^{(\nu)}\omega_1 + \ldots + x_n^{(\nu)}\omega_n, \qquad x_i^{(\nu)} \in K,$$

является последовательностью Коши в E в точности тогда, когда каждая из n последовательностей $x_i^{(\nu)}$ является последовательностью Коши в K. Доказывать будем индукцией по n. Утверждение очевидно для $n=1$. Предположим, что $n \geqslant 2$. Рассмотрим указанную выше последовательность. Не теряя общности, мы можем считать, что она сходится к 0. (Если необходимо, рассмотрим последовательность $\xi^{(\nu)} - \xi^{(\mu)}$ при $\nu, \mu \to \infty$.) Мы должны показать, что последовательности коэффициентов также сходятся к 0. Если это не имеет места, то существует число $a > 0$, такое, что при некотором j, скажем $j=1$,

$$|x_1^{(\nu)}| > a$$

для сколь угодно больших ν. Таким образом, для некоторой подпоследовательности значений ν последовательность $\xi^{(\nu)}/x_1^{(\nu)}$ сходится к 0 и, следовательно,

$$\frac{\xi^{(\nu)}}{x_1^{(\nu)}} - \omega_1 = \frac{x_2^{(\nu)}}{x_1^{(\nu)}}\omega_2 + \ldots + \frac{x_n^{(\nu)}}{x_1^{(\nu)}}\omega_n.$$

Пусть $\eta^{(\nu)}$ обозначает правую часть этого равенства. Тогда подпоследовательность $\eta^{(\nu)}$ сходится (поскольку сходится левая часть равенства). По индукции заключаем, что коэффициенты при $\omega_2, \ldots, \omega_n$ также сходятся в K, скажем, к $y_2, \ldots, y_n$. Беря предел, получаем, что

$$-\omega_1 = y_2\omega_2 + \ldots + y_n\omega_n$$

вопреки линейной независимости ω_i.

В заключение мы должны убедиться, что нормы, индуцирующие одинаковую топологию, эквивалентны. Пусть этими нормами будут $|\ |_1$ и $|\ |_2$. Существует число $C > 0$, такое, что для любого $\xi \in E$

$$|\xi|_1 \leqslant C \quad \text{влечет} \quad |\xi|_2 \leqslant 1.$$

Возьмем элемент $a \in K$ с условием $0 < |a| < 1$. Для всякого $\xi \in E$ существует однозначно определенное целое число s, такое, что

$$C|a| < |a^s\xi|_1 \leqslant C.$$

Значит, $|a^s\xi|_2 \leqslant 1$, откуда тотчас получаем

$$|\xi|_2 \leqslant C^{-1}|a|^{-1}|\xi|_1.$$

Второе неравенство следует из симметрии с аналогичной константой

Теорема 1. *Пусть A — коммутативная алгебра над полем вещественных чисел, содержащая некоторый элемент j, такой, что $j^2 = -1$. Положим $\mathbf{C} = \mathbf{R} + \mathbf{R}j$. Допустим, что A нормирована (как векторное пространство над $\mathbf{R}$) и что $|xy| \leqslant |x||y|$*

для всех x, $y \in A$. Тогда для заданного элемента $x_0 \in A$, $x_0 \neq 0$, найдется элемент $c \in \mathbf{C}$, такой, что $x_0 - c$ необратим в A.

Доказательство (Торнхейм). Предположим, что элемент $x_0 - z$ обратим для всех $z \in \mathbf{C}$. Рассмотрим отображение f: $\mathbf{C} \to A$, определяемое формулой

$$f(z) = (x_0 - z)^{-1}.$$

Легко проверяется (как обычно), что взятие обратных является непрерывной операцией. Следовательно, f непрерывно и для $z \neq 0$ имеем

$$f(z) = z^{-1}(x_0 z^{-1} - 1)^{-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{\frac{x_0}{z} - 1}\right).$$

Отсюда мы видим, что $f(z)$ стремится к нулю, когда z уходит в бесконечность (в $\mathbf{C}$). Следовательно, $z \mapsto |f(z)|$ является непрерывным отображением $\mathbf{C}$ в множество вещественных чисел $\geqslant 0$, ограниченным и принимающим малые значения вне некоторого большого круга. Значит, оно имеет максимум, скажем M. Пусть D — множество элементов $z \in \mathbf{C}$, для которых $|f(z)| = M$. Тогда D непусто; D ограничено и замкнуто. Докажем, что D открыто, и тем самым получим противоречие.

Пусть c_0 — некоторая точка из D, которую после сдвига мы можем предполагать совпадающей с нулем. Мы утверждаем, что если r, вещественное и > 0, мало, то все точки окружности радиуса r с центром в c_0 лежат в D. Действительно, рассмотрим сумму

$$S(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_0 - \omega^k r},$$

где ω — примитивный корень n-й степени из единицы. Формальное взятие логарифмической производной от $X^n - r^n = \prod_{k=1}^{n}(X - \omega^k r)$ показывает, что

$$\frac{nX^{n-1}}{X^n - r^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \omega^k r},$$

откуда, деля на n и подставляя x_0 вместо X, получаем

$$S(n) = \frac{1}{x_0 - r(r/x_0)^{n-1}}.$$

Если r мало (скажем, $|r/x_0| < 1$), то

$$\lim_{n \to \infty} |S(n)| = \left|\frac{1}{x_0}\right| = M.$$

Предположим, что существует комплексное число λ с абсолютным значением 1, такое, что

$$\left|\frac{1}{x_0-\lambda r}\right|<M.$$

Тогда около λ найдется на единичной окружности интервал и найдется такое число $\varepsilon>0$, что для всех корней из единицы ζ, лежащих в этом интервале,

$$\left|\frac{1}{x_0-\zeta r}\right|<M-\varepsilon.$$

(Это вытекает из непрерывности.) Возьмем n достаточно большим. Пусть b_n — число корней n-й степени из единицы, лежащих в нашем интервале. Тогда b_n/n приблизительно равно длине этого интервала (деленной на 2π). Мы можем представить $S(n)$ в виде суммы

$$S(n)=\frac{1}{n}\left[\sum\nolimits_{\mathrm{I}}\frac{1}{x_0-\omega^k r}+\sum\nolimits_{\mathrm{II}}\frac{1}{x_0-\omega^k r}\right],$$

где первая сумма $\sum_{\mathrm{I}}$ берется по тем корням из единицы ω^k, которые лежат в нашем интервале, а вторая сумма берется по всем остальным корням. Каждый член второй суммы имеет норму $\leqslant M$, так как M — максимум. Следовательно, получаем оценку

$$|S(n)|\leqslant\frac{1}{n}\left[\left|\sum\nolimits_{\mathrm{I}}\right|+\left|\sum\nolimits_{\mathrm{II}}\right|\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{n}(b_n(M-\varepsilon)+(n-b_n)M)\leqslant M-\frac{b_n}{n}\varepsilon.$$

Это противоречит тому факту, что предел $|S(n)|$ равен M.

Следствие. *Пусть поле K является расширением поля* $\mathbf{R}$ *и обладает абсолютным значением, продолжающим обычное абсолютное значение на* $\mathbf{R}$. *Тогда либо* $K=\mathbf{R}$, *либо* $K=\mathbf{C}$.

Доказательство. Допустим сначала, что K содержит $\mathbf{C}$. Тогда из предположения, что K — поле, и из теоремы 1 следует, что $K=\mathbf{C}$.

Если K не содержит $\mathbf{C}$, другими словами, не содержит квадратного корня из -1, то мы введем $L=K(j)$, где $j^2=-1$. Определим норму на L (как $\mathbf{R}$-пространстве), положив

$$|x+yj|=|x|+|y|$$

для $x, y\in K$. Это, очевидно, превращает L в нормированное $\mathbf{R}$-пространство. Кроме того, если $z=x+yj$ и $z'=x'+y'j$, то

$$\begin{aligned}|zz'|&=|xx'-yy'|+|xy'+x'y|\leqslant\\&\leqslant|xx'|+|yy'|+|xy'|+|x'y|=\\&=|x||x'|+|y||y'|+|x||y'|+|x'||y|=\\&=(|x|+|y|)(|x'|+|y'|)=|z||z'|,\end{aligned}$$

и мы можем снова применить теорему 1, что и завершает доказательство.

При помощи предложения 3 получается следующее важное утверждение:

Предложение 4. *Пусть K — поле, полное относительно нетривиального абсолютного значения v, и E — произвольное алгебраическое расширение K. Тогда v имеет единственное продолжение на E. Если E конечно над K, то E полное.*

Доказательство. В архимедовом случае существование продолжения очевидно, поскольку мы имеем дело с вещественными или комплексными числами. В неархимедовом случае мы отложим доказательство существования до одного из следующих параграфов. Оно использует идеи, совершенно отличные от рассматриваемых здесь. Что касается единственности, то мы можем предполагать, что E конечно над K. В силу предложения 3 всякое продолжение v на E определяет ту же топологию, что и норма, задаваемая как максимум абсолютных значений коэффициентов в разложении по базису. Если в E задана последовательность Коши $\xi^{(\nu)}$

$$\xi^{(\nu)} = x_{\nu 1}\omega_1 + \ldots + x_{\nu n}\omega_n,$$

то n последовательностей $\{x_{\nu i}\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ должны быть последовательностями Коши в K по определению нормы как максимума норм коэффициентов. Если $\{x_{\nu i}\}$ сходится в K к элементу z_i, то очевидно, что последовательность $\xi^{(\nu)}$ сходится к $z_1\omega_1 + \ldots + z_n\omega_n$. Следовательно, E — полное. Кроме того, поскольку любые два продолжения v на E эквивалентны, мы можем применить предложение 1, причем обязательно $\lambda = 1$, так как оба продолжения индуцируют одно и то же абсолютное значение v на K. Это доказывает то, что нужно.

Из единственности мы можем получить явное выражение для абсолютного значения на алгебраическом расширении K. Заметим сначала, что если E — нормальное расширение K и σ — автоморфизм E над K, то функция

$$x \longmapsto |\sigma x|$$

является абсолютным значением на E, продолжающим заданное абсолютное значение на K.

Следовательно, мы должны иметь

$$|\sigma x| = |x|$$

для всех $x \in E$. Если E алгебраично над K и σ — вложение E в $\bar{K}$ над K, то остается справедливым то же заключение. В часности, если α — алгебраический элемент степени n над K и $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ —

его сопряженные (с учетом кратностей, равных степени несепарабельности), то все абсолютные значения $|\alpha_i|$ равны. Обозначив через N норму из $K(\alpha)$ в K, мы видим, что

$$|N(\alpha)| = |\alpha|^n,$$

и извлекая корень n-й степени, получаем

Предложение 5. *Пусть K — поле, полное относительно некоторого нетривиального абсолютного значения. Пусть элемент α алгебраичен над K и N — норма из $K(\alpha)$ в K. Если $n = [K(\alpha) : K]$, то*

$$|\alpha| = |N(\alpha)|^{1/n}.$$

В частном случае поля комплексных чисел над полем вещественных чисел можно записать $\alpha = a + bi$, где $a, b \in \mathbf{R}$, и мы видим, что формула из предложения 5 является обобщением формулы для абсолютного значения комплексного числа

$$\alpha = (a^2 + b^2)^{1/2},$$

поскольку $a^2 + b^2$ есть не что иное, как норма числа α из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{R}$.

§ 3. Конечные расширения

В этом параграфе мы будем иметь дело с полем K, снабженным нетривиальным абсолютным значением v.

Мы хотим описать, как это абсолютное значение продолжается на конечные расширения поля K. Если E — расширение над K и w — некоторое абсолютное значение на E, продолжающее v, то будем писать $w \mid v$.

Мы знаем, что v может быть продолжено на пополнение K_v, а затем однозначно продолжено на его алгебраическое замыкание $\overline{K}_v$. Если E — конечное расширение K или даже произвольное алгебраическое расширение, то мы можем продолжить v на E, вложив E в $\overline{K}_v$ посредством изоморфизма над K и взяв индуцированное абсолютное значение на E. Мы докажем теперь, что всякое продолжение v может быть получено этим способом.

Предложение 6. *Пусть E — конечное расширение поля K, w — некоторое абсолютное значение на E, продолжающее v, E_w — соответствующее пополнение и K_w — замыкание K в E_w, причем E отождествлено с подполем в E_w. Тогда $E_w = EK_w$ (композит).*