его сопряженные (с учетом кратностей, равных степени несепарабельности), то все абсолютные значения $|\alpha_i|$ равны. Обозначив через N норму из $K(\alpha)$ в K, мы видим, что

$$|N(\alpha)| = |\alpha|^n,$$

и извлекая корень n-й степени, получаем

Предложение 5. *Пусть K — поле, полное относительно некоторого нетривиального абсолютного значения. Пусть элемент α алгебраичен над K и N — норма из $K(\alpha)$ в K. Если $n = [K(\alpha):K]$, то*

$$|\alpha| = |N(\alpha)|^{1/n}.$$

В частном случае поля комплексных чисел над полем вещественных чисел можно записать $\alpha = a + bi$, где $a, b \in \mathbf{R}$, и мы видим, что формула из предложения 5 является обобщением формулы для абсолютного значения комплексного числа

$$\alpha = (a^2 + b^2)^{1/2},$$

поскольку $a^2 + b^2$ есть не что иное, как норма числа α из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{R}$.

§ 3. Конечные расширения

В этом параграфе мы будем иметь дело с полем K, снабженным нетривиальным абсолютным значением v.

Мы хотим описать, как это абсолютное значение продолжается на конечные расширения поля K. Если E — расширение над K и w — некоторое абсолютное значение на E, продолжающее v, то будем писать $w \mid v$.

Мы знаем, что v может быть продолжено на пополнение K_v, а затем однозначно продолжено на его алгебраическое замыкание $\overline{K}_v$. Если E — конечное расширение K или даже произвольное алгебраическое расширение, то мы можем продолжить v на E, вложив E в $\overline{K}_v$ посредством изоморфизма над K и взяв индуцированное абсолютное значение на E. Мы докажем теперь, что всякое продолжение v может быть получено этим способом.

Предложение 6. *Пусть E — конечное расширение поля K, w — некоторое абсолютное значение на E, продолжающее v, E_w — соответствующее пополнение и K_w — замыкание K в E_w, причем E отождествлено с подполем в E_w. Тогда $E_w = EK_w$ (композит).*

Доказательство. Заметим, что K_w является пополнением K и что композит EK_w конечен над K_w, а потому, согласно предложению 4, § 2, является полным полем. Так как он содержит E, то E плотно в нем и, следовательно, $E_w = EK_w$.

Если мы начинаем с вложения σ: $E \to \overline{K}_v$ (относительно которого всегда предполагается, что оно берется над K), то снова в силу предложения 4 § 2 поле $\sigma E \cdot K_v$ — полное. Таким образом, эта конструкция и конструкция из предложения 6 по существу совпадают с точностью до изоморфизма. В дальнейшем мы примем точку зрения вложений. Теперь мы должны определить, когда два вложения дают нам одно и то же абсолютное значение на E.

Пусть даны два вложения σ, τ: $E \to \overline{K}_v$; мы будем говорить, что они *сопряжены над* K_v, если существует автоморфизм λ поля $\overline{K}_v$ над K_v, для которого $\sigma = \lambda\tau$. Мы видим, что в действительности нам достаточно знать действие λ на τE или $\tau E \cdot K_v$.

Предложение 7. *Пусть E — алгебраическое расширение K. Два вложения σ, τ: $E \to \overline{K}_v$ тогда и только тогда приводят к одному и тому же абсолютному значению на E, когда они сопряжены над K_v.*

Доказательство. Предположим, что они сопряжены над K_v. Тогда единственность продолжения абсолютного значения с K_v на $\overline{K}_v$ гарантирует, что индуцированные абсолютные значения на E равны. Обратно, предположим, что они равны. Пусть λ: $\tau E \to \sigma E$ — изоморфизм над K. Покажем, что λ продолжается до изоморфизма $\tau E \cdot K_v$ на $\sigma E \cdot K_v$ над K_v. Так как τE плотно в $\tau E \cdot K_v$, то всякий элемент $x \in \tau E \cdot K_v$ может быть записан в виде

$$x = \lim \tau x_n,$$

где $x_n \in E$. Поскольку абсолютные значения, индуцированные вложениями σ и τ на E, совпадают, последовательность $\lambda\tau x_n = \sigma x_n$ сходится к некоторому элементу из $\sigma E \cdot K_v$, который мы обозначим через λx. Непосредственно проверяется, что λx не зависит от специального выбора последовательности τx_n и что λ: $\tau E \cdot K_v \to \sigma E \cdot K_v$ есть изоморфизм, который, очевидно, оставляет поле K_v неподвижным. Это доказывает наше предложение.

Ввиду двух предыдущих предложений при заданном продолжении w абсолютного значения v на конечное расширение E поля K мы можем отождествлять E_w с композитом EK_v полей E и K_v. Если степень $N = [E : K]$ конечна, то мы будем называть

$$N_w = [E_w : K_v]$$

локальной степенью.

Предложение 8. *Пусть E — конечное сепарабельное расширение над K степени N. Тогда*

$$N=\sum_{w \mid v} N_w.$$

Доказательство. Как известно, $E=K(\alpha)$ для какого-то элемента α. Пусть $f(X)$ — его неприводимый многочлен над K. Тогда над K_v мы имеем разложение

$$f(X)=f_1(X) \ldots f_r(X)$$

на неприводимые множители $f_i(X)$. В силу нашего предположения о сепарабельности все они встречаются с кратностью 1. Вложения E в $\overline{K}_v$ соответствуют отображениям α в корни многочленов f_i. Два вложения сопряжены тогда и только тогда, когда они отображают α в корни одного и того же многочлена f_i. С другой стороны, ясно, что локальная степень в каждом случае есть в точности степень f_i. Это доказывает наше предложение.

Предложение 9. *Пусть E — конечное расширение над K. Тогда*

$$\sum_{w \mid v} [E_w : K_v] \leqslant [E : K].$$

Если E чисто несепарабельно над K, то существует только одно абсолютное значение w на E, продолжающее v.

Доказательство. Сначала докажем второе утверждение. Если E чисто несепарабельно над K и p^r — его несепарабельная степень, то $\alpha^{p^r} \in K$ для всякого α из E. Следовательно, v имеет единственное продолжение на E. Рассмотрим теперь общий случай конечного расширения и положим $F=E^{p^r}K$. Тогда F сепарабельно над K и E чисто несепарабельно над F. В силу предыдущего предложения

$$\sum_{w \mid v} [F_w : K_v]=[F : K]$$

и для каждого w будет $[E_w : F_w] \leqslant [E : F]$. После этого неравенство, фигурирующее в формулировке предложения, становится очевидным.

Если v — такое абсолютное значение на K, что для всякого конечного расширения E поля K имеет место равенство $[E : K]= = \sum_{w \mid v} [E_w : K_v]$, то мы будем говорить, что v *хорошо себя ведет*. Рассмотрим башню конечных расширений $L \supset E \supset K$. Пусть w пробегает все абсолютные значения на E, продолжающие v, а u — все абсолютные значения на L, продолжающие v. Если $u|w$, то L_u содержит E_w. Таким образом,

$$\begin{aligned}\sum_{u|v}[L_u:K_v] &= \sum_{w|v}\sum_{u|w}[L_u:E_w][E_w:K_v] = \\ &= \sum_{w|v}[E_w:K_v]\sum_{u|w}[L_u:E_w] \leqslant \\ &\leqslant \sum_{w|v}[E_w:K_v][L:E] \leqslant \\ &\leqslant [E:K][L:E].\end{aligned}$$

Отсюда мы непосредственно видим, что если v хорошо себя ведет, E — конечное расширение над K и w продолжает v на E, то w также хорошо себя ведет (мы должны всюду иметь равенство).

Пусть E — конечное расширение K и p^r — его несепарабельная степень. Напомним, что норма элемента $\alpha \in E$ задается формулой

$$N_K^E(\alpha) = \prod_\sigma \sigma\alpha^{p^r},$$

где σ пробегает все различные изоморфизмы E над K (в заданное алгебраическое замыкание).

Если w — абсолютное значение, продолжающее v на E, то норма из E_w в K_v будет называться *локальной нормой*.

Заменив выше произведение на сумму, получим *след* и *локальный след*. Мы обозначаем след сокращенно символом Tr.

Предложение 10. *Пусть E — конечное расширение K, и пусть v хорошо себя ведет. Тогда*

$$N_K^E(\alpha) = \prod_{w|v} N_{K_v}^{E_w}(\alpha),$$

$$\mathrm{Tr}_K^E(\alpha) = \sum_{w|v} \mathrm{Tr}_{K_v}^{E_w}(\alpha)$$

для любого $\alpha \in E$.

Доказательство. Предположим сначала, что $E = K(\alpha)$, и пусть $f(X)$ — неприводимый многочлен элемента α над K. Разложив $f(X)$ на неприводимые множители над K_v, получим

$$f(X) = f_1(X) \ldots f_r(X),$$

где каждый $f_i(X)$ неприводим и все f_i различны ввиду нашего предположения, что v хорошо себя ведет. Норма $N_K^E(\alpha)$ равна свободному члену f, умноженному на $(-1)^{\deg f}$, и аналогично для каждого f_i. Поскольку свободный член f равен произведению свободных членов f_i, получаем первую часть предложения. Утверждение для следа вытекает из рассмотрения предпоследнего коэффициента у f и каждого f_i.

Если E не равно $K(\alpha)$, то мы просто используем транзитивность нормы и следа. Детали предоставляются читателю.

Можно оперировать и непосредственно с вложениями. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — различные вложения E в $\overline{K}_v$ над K и p^r — несепарабельная степень E над K. Несепарабельная степень композита $\sigma E \cdot K_v$ над K_v для всякого σ не превосходит p^r. Если мы разобьем $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ на различные классы сопряженности над K_v, то из предположения, что v хорошо себя ведет, немедленно следует, что несепарабельная степень $\sigma_i E \cdot K_v$ над K_v для каждого i должна быть также равна p^r. Таким образом, формула, выражающая норму в виде произведения сопряженных с кратностью p^r, распадается в произведение множителей, соответствующих классам сопряженности над K_v.

Принимая во внимание предложение 5 из § 2, мы получаем

Предложение 11. *Пусть K снабжено хорошо себя ведущим абсолютным значением v. Пусть, далее, E — конечное расширение над K и*

$$N_w = [E_w : K_v]$$

для всякого абсолютного значения w на E, продолжающего v. Тогда

$$\prod_{w \mid v} |\alpha|_w^{N_w} = \left| N_K^E(\alpha) \right|_v$$

для любого $\alpha \in E$.

§ 4. Нормировиния

В этом параграфе мы получим среди других результатов теорему о существовании продолжения неархимедовых абсолютных значений на алгебраические расширения. Введем сначала одно обобщение понятия неархимедова абсолютного значения.

Пусть Γ — мультипликативная коммутативная группа. Мы будем говорить, что на Γ определено *упорядочение*, если задано подмножество S в Γ, замкнутое относительно умножения и такое, что Γ есть объединение следующих попарно непересекающихся подмножеств: S, единичного элемента 1 и множества S^{-1}, состоящего из всех обратных к элементам из S.

По определению неравенство $\alpha < \beta$ для $\alpha, \beta \in \Gamma$ означает, что $\alpha\beta^{-1} \in S$. В частности, $\alpha < 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in S$. Легко проверяются следующие свойства отношения $<$:

1. Каковы бы ни были $\alpha, \beta \in \Gamma$, либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta < \alpha$, причем эти возможности взаимно исключают друг друга.
2. $\alpha < \beta$ влечет $\alpha\gamma < \beta\gamma$ для всякого $\gamma \in \Gamma$.
3. $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$ влечет $\alpha < \gamma$.

(Обратно, отношение, удовлетворяющее указанным трем свой-