Если E не равно $K(\alpha)$, то мы просто используем транзитивность нормы и следа. Детали предоставляются читателю.

Можно оперировать и непосредственно с вложениями. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — различные вложения E в $\overline{K}_v$ над K и p^r — несепарабельная степень E над K. Несепарабельная степень композита $\sigma E \cdot K_v$ над K_v для всякого σ не превосходит p^r. Если мы разобьем $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ на различные классы сопряженности над K_v, то из предположения, что v хорошо себя ведет, немедленно следует, что несепарабельная степень $\sigma_i E \cdot K_v$ над K_v для каждого i должна быть также равна p^r. Таким образом, формула, выражающая норму в виде произведения сопряженных с кратностью p^r, распадается в произведение множителей, соответствующих классам сопряженности над K_v.

Принимая во внимание предложение 5 из § 2, мы получаем

Предложение 11. *Пусть K снабжено хорошо себя ведущим абсолютным значением v. Пусть, далее, E — конечное расширение над K и*

$$N_w = [E_w : K_v]$$

для всякого абсолютного значения w на E, продолжающего v. Тогда

$$\prod_{w \mid v} |\alpha|_w^{N_w} = \left| N_K^E(\alpha) \right|_v$$

для любого $\alpha \in E$.

§ 4. Нормирования

В этом параграфе мы получим среди других результатов теорему о существовании продолжения неархимедовых абсолютных значений на алгебраические расширения. Введем сначала одно обобщение понятия неархимедова абсолютного значения.

Пусть Γ — мультипликативная коммутативная группа. Мы будем говорить, что на Γ определено *упорядочение*, если задано подмножество S в Γ, замкнутое относительно умножения и такое, что Γ есть объединение следующих попарно непересекающихся подмножеств: S, единичного элемента 1 и множества S^{-1}, состоящего из всех обратных к элементам из S.

По определению неравенство $\alpha < \beta$ для $\alpha, \beta \in \Gamma$ означает, что $\alpha\beta^{-1} \in S$. В частности, $\alpha < 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in S$. Легко проверяются следующие свойства отношения $<$:

1. Каковы бы ни были $\alpha, \beta \in \Gamma$, либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta < \alpha$, причем эти возможности взаимно исключают друг друга.
2. $\alpha < \beta$ влечет $\alpha\gamma < \beta\gamma$ для всякого $\gamma \in \Gamma$.
3. $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$ влечет $\alpha < \gamma$.

(Обратно, отношение, удовлетворяющее указанным трем свой-

ствам, определяет подмножество S, состоящее из всех элементов < 1. Однако этот факт нам в дальнейшем не потребуется.)

Удобно присоединить формально к упорядоченной группе дополнительный элемент 0, такой, что $0\alpha = 0$ и $0 < \alpha$ для всех $\alpha \in \Gamma$. Упорядоченная группа тогда является аналогом мультипликативной группы положительных вещественных чисел, за исключением того, что упорядочение, возможно, неархимедово.

Если $\alpha \in \Gamma$ и n — целое число $\neq 0$, для которого $\alpha^n = 1$, то $\alpha = 1$. Это тотчас следует из предположения о том, что S замкнуто относительно умножения и не содержит 1. В частности, отображение $\alpha \mapsto \alpha^n$ инъективно.

Пусть K — поле. Под *нормированием* K мы будем понимать отображение $x \mapsto |x|$ поля K в упорядоченную группу Γ, к которой присоединен дополнительный элемент 0, такое, что

НОР 1. $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

НОР 2. $|xy| = |x||y|$ для всех $x, y \in K$.

НОР 3. $|x + y| \leqslant \max(|x|, |y|)$.

Мы видим, что нормирование определяет гомоморфизм мультипликативной группы K^* в Γ. Нормирование называется *тривиальным*, если оно отображает K^* в 1. Если отображение, задаваемое нормированием, не сюръективно, то его образ будет упорядоченной подгруппой в Γ и, беря ограничение на этот образ, мы получим нормирование, отображающее K^* на упорядоченную группу, называемую *группой значений*.

Мы будем обозначать нормирования также через v. Пусть v_1, v_2 — два нормирования на K. Мы будем говорить, что они эквивалентны, если существует сохраняющий порядок изоморфизм λ образа v_1 на образ v_2, такой, что

$$|x|_2 = \lambda |x|_1$$

для всех $x \in K$. (Мы принимаем соглашение, что $\lambda(0) = 0$.)

Нормирования, как и абсолютные значения, обладают дополнительными свойствами. Например, $|1| = 1$, поскольку $|1| = |1|^2$. Кроме того,

$$|\pm x| = |x|$$

для всех $x \in K$. Доказательство очевидно. Далее, если $|x| < |y|$, то

$$|x + y| = |y|.$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что при наших предположениях

$$|y| = |y + x - x| \leqslant \max(|y + x|, |x|) \leqslant \max(|x|, |y|) = |y|.$$

Наконец, в сумме

$$x_1 + \ldots + x_n = 0$$

по крайней мере два элемента суммы имеют одинаковые значения

при нормировании. Это непосредственно вытекает из предыдущего замечания.

Пусть K — поле. Подкольцо $\mathfrak{o}$ в K называется *кольцом нормирования*, если оно обладает тем свойством, что для всякого $x \in K$ либо $x \in \mathfrak{o}$, либо $x^{-1} \in \mathfrak{o}$.

Мы увидим сейчас, как кольца нормирования приводят к нормированиям. Пусть $\mathfrak{o}$ — кольцо нормирования в K и U — группа единиц кольца $\mathfrak{o}$. Мы утверждаем, что $\mathfrak{o}$ — локальное кольцо. Действительно, предположим, что $x, y \in \mathfrak{o}$ не являются единицами. Пусть, скажем, $x/y \in \mathfrak{o}$. Тогда $1 + x/y = (x+y)/y \in \mathfrak{o}$ Если бы элемент $x+y$ был единицей, то $1/y \in \mathfrak{o}$, вопреки предположению, что y — не единица. Следовательно, $x+y$ — не единица. Тривиально проверяется, что для $z \in \mathfrak{o}$ элемент zx не является единицей. Следовательно, не единицы образуют идеал, являющийся, таким образом, единственным максимальным идеалом в $\mathfrak{o}$.

Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{m}^*$ — мультипликативная система ненулевых элементов из $\mathfrak{m}$. Тогда

$$K^* = \mathfrak{m}^* \cup U \cup \mathfrak{m}^{*-1}$$

есть объединение попарно не пересекающихся множеств $\mathfrak{m}^*$, U и $\mathfrak{m}^{*-1}$. Факторгруппе K^*/U может быть придано упорядочение. Если $x \in K^*$, то обозначаем смежный класс xU символом $|x|$, полагая $|0| = 0$. Считаем по определению, что $|x| < 1$ (т. е $|x| \in S$) тогда и только тогда, когда $x \in \mathfrak{m}^*$. Наше множество S, очевидно, замкнуто относительно умножения, и если положить $\Gamma = K^*/U$, то Γ окажется объединением попарно не пересекающихся множеств S, 1, S^{-1}. Таким образом, мы получаем нормирование поля K.

Отметим, что если $x, y \in K$ и $y \neq 0$, то

$$|x| < |y| \Longleftrightarrow |x/y| < 1 \Longleftrightarrow x/y \in \mathfrak{m}^*.$$

Обратно, если задано нормирование поля K в некоторую упорядоченную группу, то пусть $\mathfrak{o}$ — подмножество в K, состоящее из всех таких x, что $|x| \leqslant 1$. Из аксиом нормирования тотчас вытекает, что $\mathfrak{o}$ — кольцо Если $|x| < 1$, то $|x^{-1}| > 1$, так что x^{-1} не лежит в $\mathfrak{o}$. Если $|x| = 1$, то $|x^{-1}| = 1$. Мы видим, что $\mathfrak{o}$ есть кольцо нормирования, максимальный идеал которого состоит из элементов x с $|x| < 1$ и единицами которого служат элементы x с $|x| = 1$. Читатель тотчас проверит, что имеется биективное соответствие между кольцами нормирования в K и классами эквивалентности нормирований.

Пусть F — поле и пусть символ ∞ удовлетворяет обычным алгебраическим правилам. Для $a \in F$ по определению

$$a \pm \infty = \infty; \quad a \cdot \infty = \infty, \quad \text{когда} \quad a \neq 0;$$

$$\infty \cdot \infty = \infty; \qquad 1/0 = \infty \quad \text{и} \quad 1/\infty = 0$$

Выражения $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞ не определены.

Точкой φ поля K в поле F называется отображение

$$\varphi\colon K \to \{F, \infty\}$$

поля K в множество, состоящее из F и ∞, удовлетворяющее обычным правилам для гомоморфизмов

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$
$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

(если только выражения, стоящие в правых частях этих формул, определены) и такое, что $\varphi(1) = 1$. Мы будем говорить также, это эта точка является *F-значной*. Элементы из K, которые не переводятся в ∞, будут называться *конечными* в этой точке, а остальные элементы будут называться *бесконечными*.

Читатель тотчас проверит, что множество $\mathfrak{o}$ элементов из K, конечных в некоторой точке, является кольцом нормирования в K. Его максимальный идеал состоит из тех элементов x, для которых $\varphi(x) = 0$. Обратно, если $\mathfrak{o}$ — кольцо нормирования в K с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, то обозначим через $\varphi : \mathfrak{o} \to \mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ канонический гомоморфизм и положим $\varphi(x) = \infty$ для $x \in K$, $x \notin \mathfrak{o}$. Тривиально проверяется, что φ — точка.

Пусть $\varphi_1\colon K \to \{F_1, \infty\}$ и $\varphi_2 : K \to \{F_2, \infty\}$ — две точки поля K. Беря их ограничения на образы, мы можем считать, что они сюръективны. Будем говорить, что они *эквивалентны*, если существует изоморфизм $\lambda\colon F_1 \to F_2$, для которого $\varphi_2 = \lambda \circ \varphi_1$. (Мы полагаем $\lambda(\infty) = \infty$.) Легко видеть, что две точки эквивалентны в том и только в том случае, если они имеют одно и то же кольцо нормирования. Ясно, что имеется биективное соответствие между классами эквивалентности точек поля K и кольцами нормирования в K. Точка называется *тривиальной*, если она инъективна. Кольцом нормирования тривиальной точки служит просто само поле K.

Заметим, что, как и в случае гомоморфизмов, композиция двух точек снова является точкой (тривиальная проверка).

Часто удобнее иметь дело с точками, а не с кольцами нормирования, так же как иногда удобнее иметь дело с гомоморфизмами, а не с каноническими гомоморфизмами или кольцами по модулю идеала. Однако во всем дальнейшем мы используем язык колец нормирования и предоставляем читателю перевод на язык точек.

Общая теория нормирований и колец нормирования принадлежит Круллю (1932). Однако теория продолжения гомоморфизмов из гл. IX, § 3, была развита лишь около 1945 г. Она дает нам теорему продолжения для нормирований.

Теорема 1. *Пусть K — подполе поля L. Тогда всякое нормирование на K имеет продолжение до нормирования на L.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{o}$ — кольцо нормирования в K, соответствующее данному нормированию. Пусть $\varphi: \mathfrak{o} \to \mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ — канонический гомоморфизм на поле вычетов. Продолжим его до гомоморфизма некоторого кольца нормирования $\mathfrak{O}$ в L, согласно § 3 из гл. IX. Пусть $\mathfrak{M}$ — максимальный идеал в $\mathfrak{O}$. Так как $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{o}$ содержит $\mathfrak{m}$, но не содержит 1, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{m}$. Пусть U' — группа единиц кольца $\mathfrak{O}$. Тогда $U' \cap K = U$ будет группой единиц кольца $\mathfrak{o}$. Таким образом, имеем каноническое вложение

$$K^*/U \to L^*/U',$$

которое, как непосредственно проверяется, сохраняет порядок. Отождествляя K^*/U с подгруппой в L^*/U', мы получаем продолжение нашего нормирования поля K до нормирования L.

Разумеется, когда мы имеем дело с абсолютными значениями, мы требуем, чтобы группа значений была подгруппой мультипликативной группы положительных чисел. Следовательно, мы должны еще кое-что доказать о природе группы значений L^*/U' в случае, когда L алгебраично над K.

Предложение 12. *Пусть L — конечное расширение степени n поля K, и пусть w — нормирование L с группой значений Γ', а Γ — группа значений нормирования поля K. Тогда $(\Gamma' : \Gamma) \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть $|y_1|, \ldots, |y_r|$ — элементы из Γ', представляющие различные смежные классы Γ' по Γ. Докажем, что y_j линейно независимы над K. В соотношении $a_1y_1 + \ldots + a_ry_r = 0$ с $a_j \in K$, $a_j \neq 0$, два члена должны иметь одно и то же значение, скажем $|a_iy_i| = |a_jy_j|$, где $i \neq j$ и, значит,

$$|y_i| = |a_i^{-1}a_j||y_j|.$$

Это противоречит предположению, что $|y_i|, |y_j|$ $(i \neq j)$ представляют разные смежные классы Γ' по Γ, и тем самым доказывает наше предложение.

Следствие 1. *Существует целое число $e \geqslant 1$, такое, что отображение $\gamma \mapsto \gamma^e$ индуцирует инъективный гомоморфизм Γ' в Γ.*

Доказательство. Возьмем e равное индексу $(\Gamma' : \Gamma)$.

Следствие 2. *Если K — поле с нормированием v, группа значений которого есть упорядоченная подгруппа упорядоченной группы положительных вещественных чисел, и если L — алгебраическое расширение поля K, то существует продолжение нормирования v на L, группой значений которого также служит некоторая упорядоченная подгруппа положительных вещественных чисел.*

Доказательство. Мы знаем, что можно продолжить v до нормирования w поля L с некоторой группой значений Γ', а группа

значений Γ нормирования v может быть отождествлена с подгруппой в $\mathbf{R}^+$. В силу следствия 1 всякий элемент из Γ' имеет конечный период по модулю Γ. Так как каждый элемент из $\mathbf{R}^+$ имеет единственный корень e-й степени для всякого целого числа $e \geqslant 1$, то мы очевидным образом можем найти сохраняющее порядок вложение Γ' в $\mathbf{R}^+$, тождественное на Γ. Таким образом, мы получаем наше продолжение v до абсолютного значения на L.

Следствие 3. *Если L конечно над K и Γ — бесконечная циклическая группа, то группа Γ' также бесконечная циклическая.*

Доказательство. Использовать следствие 1 и тот факт, что всякая подгруппа циклической группы циклическая.

Придадим теперь нашему предыдущему предложе ию несколько более сильную форму. Будем называть $(\Gamma' : \Gamma)$ *индексом ветвления.*

Предложение 13. *Пусть L — конечное расширение степени n поля K, $\mathfrak{O}$ — кольцо нормирования в L, $\mathfrak{M}$ — его максимальный идеал, $\mathfrak{o} = \mathfrak{O} \cap K$ и $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{o}$, т. е. $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{o}$. Тогда степень поля вычетов $[\mathfrak{O}/\mathfrak{M} : \mathfrak{o}/\mathfrak{m}]$ конечна. Если мы обозначим ее через f и через e — индекс ветвления, то $ef \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть $y_1, \ldots, y_e$ — представители в L^* различных смежных классов Γ'/Γ и $z_1, \ldots, z_s$ — элементы из $\mathfrak{O}$, классы вычетов которых $\operatorname{mod} \mathfrak{M}$ линейно независимы над $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$. Рассмотрим соотношение

$$\sum_{i,\, j} a_{ij} z_j y_i = 0,$$

где $a_{ij} \in K$ и не все $a_{ij} = 0$. Во внутренней сумме

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} z_j$$

поделим все члены на коэффициент $a_{i\nu}$, имеющий наибольшее значение относительно нормирования. Мы получим линейную комбинацию элементов $z_1, \ldots, z_s$ с коэффициентами в $\mathfrak{o}$, причем по крайней мере один коэффициент является единицей. Так как $z_1, \ldots, z_s$ линейно независимы по модулю $\mathfrak{M}$ над $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$, то наша линейная комбинация является единицей. Следовательно,

$$\left| \sum_{j=1}^{s} a_{ij} z_j \right| = |a_{i\nu}|$$

для некоторого индекса ν. В сумме

$$\sum_{i=1}^{e} \left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij} z_j \right) y_i = 0,$$

рассматриваемой как сумма по i, по крайной мере два члена имеют одинаковое значение. Это противоречит независимости элементов $|y_1|, \ldots, |y_e| \bmod \Gamma$, как и в доказательстве предложения 12.

Замечание. Наше доказательство показывает также, что элементы $\{z_j y_i\}$ линейно независимы над K. Позднее это будет использовано.

Если w — продолжение нормирования v, то индекс ветвления будет обозначаться через $e(w|v)$, а степень поля вычетов — через $f(w|v)$.

Предложение 14. *Пусть K — поле с нормированием v и $K \subset E \subset L$ — конечные расширения K. Пусть w — продолжение v на E и u — продолжение w на L. Тогда*

$$e(u|w)\,e(w|v) = e(u|v),$$
$$f(u|w)\,f(w|v) = f(u|v).$$

Доказательство. Очевидно.

Словами предыдущее предложение можно выразить так: индекс ветвления и степень поля вычетов мультипликативны в башнях.

С помощью нормирований (или колец нормирования) можно получить характеристику целых элементов. Будем пользоваться следующей терминологией. Пусть $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{O}$ — локальные кольца с максимальными идеалами $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{M}$ соответственно. Будем говорить, что $\mathfrak{O}$ *лежит над* $\mathfrak{o}$, если $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{O}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{m}$. В этом случае имеется каноническое вложение $\mathfrak{o}/\mathfrak{m} \subset \mathfrak{O}/\mathfrak{M}$.

Предложение 15. *Пусть $\mathfrak{o}$ — локальное кольцо, содержащееся в поле L. Элемент x из L тогда и только тогда является целым над $\mathfrak{o}$, когда x принадлежит всякому кольцу нормирования $\mathfrak{O}$ поля L, лежащему над $\mathfrak{o}$.*

Доказательство. Предположим, что x не является целым над $\mathfrak{o}$. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в $\mathfrak{o}$. Тогда идеал $(\mathfrak{m}, 1/x)$ в $\mathfrak{o}[1/x]$ не может совпадать со всем кольцом, поскольку в противном случае мы имели бы

$$-1 = a_n(1/x)^n + \ldots + a_1(1/x) + y,$$

где $y \in \mathfrak{m}$ и $a_i \in \mathfrak{o}$, откуда

$$(1+y)\,x^n + \ldots + a_n = 0.$$

Но $1+y$ не лежит в $\mathfrak{m}$, следовательно, является единицей в $\mathfrak{o}$. Разделив уравнение на $1+y$, видим, что x — целый над $\mathfrak{o}$, вопреки нашему предположению. Таким образом, идеал $(\mathfrak{m}, 1/x)$ не совпадает со всем кольцом и, следовательно, содержится в некотором максимальном идеале $\mathfrak{P}$, пересечение которого с $\mathfrak{o}$ содержит $\mathfrak{m}$, т. е. должно быть равно $\mathfrak{m}$. Продолжая канонический гомоморфизм $\mathfrak{o}[1/x] \to \mathfrak{o}[1/x]/\mathfrak{P}$ до гомоморфизма некоторого кольца нормирования $\mathfrak{O}$

поля L, мы видим, что образ $1/x$ есть 0 и, следовательно, x не может лежать в этом кольце нормирования.

Обратно, предположим, что элемент x является целым над $\mathfrak{o}$, и пусть

$$x^n + \ldots + a_0 = 0$$

— целое уравнение для x с коэффициентами в $\mathfrak{o}$. Пусть $\mathfrak{O}$ — произвольное кольцо нормирования поля L, лежащее над $\mathfrak{o}$, и $|\ \ |$ — соответствующее нормирование. Разделим уравнение на x^n. Если $|x| > 1$, то $|1/x| < 1$, и мы получаем выражение для 1 в виде суммы членов, каждый из которых имеет нормирование < 1, что невозможно. Следовательно, $|x| \leqslant 1$, т. е. $x \in \mathfrak{O}$, что и требовалось установить.

Предложение 16. *Пусть A — кольцо, содержащееся в поле L. Элемент x поля L тогда и только тогда является целым над A, когда x лежит во всяком кольце нормирования $\mathfrak{O}$ поля L, содержащем A.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущего предложения и предоставляется читателю в качестве упражнения.

Мы закончим этот параграф установлением связи между кольцами нормирования в конечном расширении и целыми замыканиями.

Предложение 17. *Пусть $\mathfrak{o}$ — кольцо нормирования поля K, L — конечное расширение K, $\mathfrak{O}$ — кольцо нормирования поля L, лежащее над $\mathfrak{o}$, и $\mathfrak{M}$ — его максимальный идеал. Пусть, далее, B — целое замыкание кольца $\mathfrak{o}$ в L и $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \cap B$. Тогда $\mathfrak{O}$ равно локальному кольцу $B_{\mathfrak{P}}$.*

Доказательство. Ясно, что $B_{\mathfrak{P}}$ содержится в $\mathfrak{O}$. Обратно, пусть x — элемент из $\mathfrak{O}$. Тогда x удовлетворяет уравнению с коэффициентами в K, среди которых не все равны 0, скажем

$$a_n x^n + \ldots + a_0 = 0, \qquad a_i \in K.$$

Пусть a_s — коэффициент, имеющий наибольшее значение среди a_i относительно нормирования, ассоциированного с кольцом нормирования $\mathfrak{o}$, и притом самый старший из коэффициентов, имеющих это значение. Положим $b_i = a_i/a_s$. Тогда все $b_i \in \mathfrak{o}$ и $b_n, \ldots, b_{s+1} \in \mathfrak{M}$. Разделим уравнение на x^s. Получим

$$(b_n x^{n-s} + \ldots + b_{s+1}x + 1) + \frac{1}{x}\left(b_{s-1} + \ldots + b_0 \frac{1}{x^{s-1}}\right) = 0.$$

Обозначим через y и z два выражения, стоящие в скобках в предыдущем уравнении, так что

$$-y = z/x \quad \text{и} \quad -xy = z.$$

Чтобы доказать наше предложение, достаточно показать, что y и z лежат в B и что y не лежит в $\mathfrak{P}$.

Воспользуемся предложением 15. Если некоторое кольцо нормирования из L, лежащее над $\mathfrak{o}$, содержит x, то оно содержит и y, поскольку y есть многочлен от x с коэффициентами в $\mathfrak{o}$. Следовательно, оно содержит также и $z = -xy$. Если, с другой стороны, кольцо нормирования поля L, лежащее над $\mathfrak{o}$, содержит $1/x$, то оно содержит z, поскольку z есть многочлен от $1/x$ с коэффициентами в $\mathfrak{o}$. Следовательно, это кольцо нормирования содержит также и y. Отсюда в силу предложения 15 заключаем, что y, z лежат в B.

Кроме того, так как $x \in \mathfrak{O}$, а $b_n, \ldots, b_{s+1}$ лежат по построению в $\mathfrak{M}$, то y не может лежать в $\mathfrak{M}$ и, следовательно, не может лежать в $\mathfrak{P}$. Это завершает доказательство.

Следствие 1. *Пусть обозначения те же, что и в предложении. Тогда существует лишь конечное число колец нормирования в L, лежащих над $\mathfrak{o}$.*

Доказательство. Это вытекает из того факта, что существует лишь конечное число максимальных идеалов $\mathfrak{P}$ кольца B, лежащих над максимальным идеалом кольца $\mathfrak{o}$ (следствие к предложению 11, гл. IX, § 2).

Следствие 2. *Пусть обозначения те же, что и в предложении. Предположим дополнительно, что L является расширением Галуа над K. Если $\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{O}'$ — два кольца нормирования в L, лежащие над $\mathfrak{o}$, с максимальными идеалами $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ соответственно, то существует автоморфизм σ поля L над K, такой, что $\sigma\mathfrak{O} = \mathfrak{O}'$ и $\sigma\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{P} = \mathfrak{O} \cap B$ и $\mathfrak{P}' = \mathfrak{O}' \cap B$. В силу предложения 11 из гл. IX, § 2, мы знаем, что существует автоморфизм σ поля L над K, для которого $\sigma\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$. После этого наше утверждение очевидно.

Пример. Пусть k — поле и K — его конечно порожденное расширение степени трансцендентности 1. Если t — базис трансцендентности K над k, то K будет конечным алгебраическим расширением над $k(t)$. Пусть $\mathfrak{O}$ — кольцо нормирования поля K, содержащее k, причем $\mathfrak{O} \neq K$. Положим $\mathfrak{o} = \mathfrak{O} \cap k(t)$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{o}$ является кольцом нормирования поля $k(t)$ (условие об обратных заведомо удовлетворяется) и соответствующее нормирование поля $k(t)$ не может быть тривиальным: либо t, либо $t^{-1} \in \mathfrak{o}$. Скажем, $t \in \mathfrak{o}$. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в $\mathfrak{o}$. Тогда $\mathfrak{m} \cap k[t]$ не может быть нулевым идеалом, иначе канонический гомоморфизм $\mathfrak{o} \to \mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ индуцировал бы изоморфизм на $k[t]$ и, значит, изоморфизм на $k(t)$ вопреки предположению. Следовательно, $\mathfrak{m} \cap k[t]$ есть простой идеал $\mathfrak{p}$, порожден-

ный каким-то неприводимым многочленом $p(t)$. Локальное кольцо $k[t]_{\mathfrak{p}}$ является, очевидно, кольцом нормирования, которое должно совпадать с $\mathfrak{o}$, поскольку всякий элемент из $k(t)$ имеет представление вида $p^r u$, где u — единица в $k[t]_{\mathfrak{p}}$. Таким образом, мы определили все кольца нормирования поля $k(t)$, содержащие k, и мы видим, что группа значений—циклическая. Такие нормирования будут называться *дискретными*. Они изучаются более подробно ниже. Ввиду следствия 3 предложения 12 кольцо нормирования $\mathfrak{O}$ в K также дискретно.

Поле вычетов $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ равно $k[t]/\mathfrak{p}$, а потому является конечным расширением k. В силу предложения 13 отсюда следует, что $\mathfrak{O}/\mathfrak{M}$ конечно над k (здесь $\mathfrak{M}$ обозначает максимальный идеал в $\mathfrak{O}$).

Наконец, отметим, что существует лишь конечное число колец нормирования $\mathfrak{O}$ поля K, содержащих k и таких, что t лежит в максимальном идеале кольца $\mathfrak{O}$. Действительно, такое кольцо нормирования должно лежать над $k[t]_{\mathfrak{p}}$, где $\mathfrak{p}=(t)$ — простой идеал, порожденный t, и мы можем применить доказанное выше следствие 1.

§ 5. *Пополнения и нормирования*

В этом параграфе мы рассматриваем неархимедово абсолютное значение v на поле K. Это абсолютное значение является нормированием, группа значений которого Γ_K есть подгруппа группы положительных вещественных чисел. Пусть $\mathfrak{o}$ — его кольцо нормирования, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал.

Обозначим через $\hat{K}$ пополнение K относительно v и через $\hat{\mathfrak{o}}$ (соответственно $\hat{\mathfrak{m}}$) — замыкание $\mathfrak{o}$ (соответственно $\mathfrak{m}$) в $\hat{K}$. По непрерывности всякий элемент из $\hat{\mathfrak{o}}$ имеет значение $\leqslant 1$, а всякий элемент из $\hat{K}$, не лежащий в $\hat{\mathfrak{o}}$, имеет значение >1. Если $x \in \hat{K}$, то существует элемент $y \in K$, для которого $|x-y|$ очень мало и, значит, $|x|=|y|$ для такого элемента y (в силу неархимедовости). Следовательно, $\hat{\mathfrak{o}}$ — кольцо нормирования в $\hat{K}$ и $\hat{\mathfrak{m}}$ — его максимальный идеал. Кроме того,

$$\hat{\mathfrak{o}} \cap K = \mathfrak{o}, \quad \hat{\mathfrak{m}} \cap K = \mathfrak{m},$$

и мы имеем изоморфизм

$$\mathfrak{o}/\mathfrak{m} \xrightarrow{\approx} \hat{\mathfrak{o}}/\hat{\mathfrak{m}}.$$

Таким образом, поле вычетов $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ не изменяется при пополнении.

Пусть E — расширение поля K, $\mathfrak{o}_E$ — его кольцо нормирования, лежащее над $\mathfrak{o}$, и $\mathfrak{m}_E$ — максимальный идеал в $\mathfrak{o}_E$. Предположим, что нормирование, соответствующее $\mathfrak{o}_E$, является в действительности