абсолютным значением, так что мы можем образовать пополнение $\hat{E}$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{o}_E/\mathfrak{m}_E & \xrightarrow{\approx} & \hat{\mathfrak{o}}_E/\hat{\mathfrak{m}}_E \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{o}/\mathfrak{m} & \xrightarrow{\approx} & \hat{\mathfrak{o}}/\hat{\mathfrak{m}} \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки являются вложениями, а горизонтальные — изоморфизмами. Таким образом, расширение поля вычетов нашего нормирования можно изучать для пополнений E и K.

Аналогичное замечание применимо и к индексу ветвления. Пусть $\Gamma_v(K)$ и $\Gamma_v(\hat{K})$ обозначают группы значений наших нормирований на K и $\hat{K}$ соответственно (т. е. образ при отображении $x \mapsto |x|$ для $x \in K^*$ и $x \in \hat{K}^*$ соответственно). Мы видели выше, что $\Gamma_v(K) = \Gamma_v(\hat{K})$; другими словами, ввиду свойства неархимедовости группа значений при пополнении остается той же самой. (Это, разумеется, уже не так в архимедовом случае.) Пусть снова E — расширение поля K и w — абсолютное значение на E, продолжающее v. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_w(E) & \xrightarrow{\approx} & \Gamma_w(\hat{E}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma_v(K) & \xrightarrow{\approx} & \Gamma_v(\hat{K}) \end{array}$$

из которой видно, что индекс ветвления $(\Gamma_w(E) : \Gamma_v(K))$ также не изменяется при пополнении.

§ 6. *Дискретные нормирования*

Нормирование называется *дискретным*, если его группа значений циклическая. В этом случае нормирование является абсолютным значением (если мы рассматриваем группу значений как подгруппу в группе положительных вещественных чисел). Для всякого простого числа p p-адическое нормирование поля рациональных чисел дискретно. В силу следствия 3 предложения 12 § 4 продолжение дискретного нормирования на конечное расширение также дискретно. Если не считать абсолютные значения, получаемые вложением поля в поле вещественных или комплексных чисел, дискретные нормирования являются практически наиболее важными абсолютными значениями. Мы посвятим им несколько замечаний.

Пусть v — дискретное нормирование поля K и $\mathfrak{o}$ — его кольцо нормирования, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал. В $\mathfrak{m}$ имеется элемент π, значение которого $|\pi|$ порождает всю группу значений. (Другой образующей группы значений служит элемент $|\pi^{-1}|$.) Такой элемент π называется *локальным параметром* для v (или для $\mathfrak{m}$). Всякий элемент x из K может быть записан в форме

$$x = u\pi^r,$$

где u — единица из $\mathfrak{o}$ и r — некоторое целое число. Действительно, $|x| = |\pi|^r = |\pi^r|$ для некоторого $z \in \mathbf{Z}$, откуда вытекает, что x/π^r — единица в $\mathfrak{o}$. Мы называем r *порядком* x относительно v. Он, очевидно, не зависит от выбора параметра. Мы будем также говорить, что x имеет *нуль порядка* r. (Если r отрицательно, то мы говорим, что x имеет *полюс порядка* $-r$.)

В частности, мы видим, что $\mathfrak{m}$ — главный идеал, порожденный π. В качестве упражнения проверьте, что всякий идеал в $\mathfrak{o}$ главный и является степенью $\mathfrak{m}$. Заметим, кроме того, что $\mathfrak{o}$ — факториальное кольцо с единственным простым элементом (с точностью до единиц), а именно π.

Для элементов $x, y \in K$ будем использовать запись $x \sim y$, если $|x| = |y|$. Пусть π_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — последовательность элементов из $\mathfrak{o}$, таких, что $\pi_i \sim \pi^i$. Пусть R — множество представителей $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{o}$. Это означает, что каноническое отображение $\mathfrak{o} \to \mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ индуцирует биекцию R на $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$. *Всякий элемент x из $\mathfrak{o}$ может быть записан в виде сходящегося ряда*

$$x = a_0 + a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + \ldots,$$

где коэффициенты $a_i \in R$ однозначно определяются элементом x. Это легко доказывается посредством индуктивного рассуждения. Предположим, что

$$x \equiv a_0 + \ldots + a_n\pi_n \pmod{\mathfrak{m}^{n+1}}.$$

Тогда $x - (a_0 + \ldots + a_n\pi_n) = \pi_{n+1}y$ для некоторого $y \in \mathfrak{o}$. По предположению $y = a_{n+1} + \pi z$ для некоторого $a_{n+1} \in R$. Отсюда получаем

$$x \equiv a_0 + \ldots + a_{n+1}\pi_{n+1} \pmod{\mathfrak{m}^{n+2}},$$

и ясно, что n-й член нашего ряда стремится к 0. Очевидно, что построенный таким образом ряд сходится к x. Если поле K — полное относительно нашего нормирования, то всякий такой ряд сходится к некоторому элементу из K (в силу неархимедовости!). Из того факта, что R содержит точно по одному представителю для каждого класса вычетов $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$, вытекает, что a_i однозначно определены

Примеры. Рассмотрим сначала случай поля рациональных чисел с p-адическим нормированием v_p. Пополнение обозначим символом $\mathbf{Q}_p$. Это поле *p-адических чисел*. Замыкание $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Q}_p$ называется кольцом *целых p-адических чисел* $\mathbf{Z}_p$. Отметим, что простое число p является простым элементом и в кольце $\mathbf{Z}$, и в его замыкании $\mathbf{Z}_p$. Мы можем выбрать в качестве нашего множества представителей R множество целых чисел $(0, 1, \ldots, p-1)$. Таким образом, всякое целое p-адическое число может быть записано в виде сходящейся суммы $\sum a_i p^i$, где a_i — целые числа, $0 \leqslant a_i \leqslant p-1$. Эта сумма называется *$p$-адическим разложением*. Такие суммы складываются и умножаются обычным способом как сходящиеся ряды.

Например, справедлив обычный формализм для геометрической прогрессии, и, скажем, для $p=3$

$$-1 = \frac{2}{1-3} = 2(1+3+3^2+\ldots).$$

Отметим, что представители $(0, 1, \ldots, p-1)$ ни в коей мере не являются единственными, могущими быть использованными. В действительности можно доказать, что $\mathbf{Z}_p$ содержит корни $(p-1)$-й степени из единицы, и часто удобнее выбирать эти корни из единицы в качестве представителей для ненулевых элементов поля вычетов.

Теперь рассмотрим случай поля рациональных функций $k(t)$, где k — произвольное поле и t трансцендентно над k. Возьмем нормирование, определяемое простым элементом t кольца $k[t]$. Это нормирование дискретно, а пополнением $k[t]$ относительно него служит кольцо степенных рядов $k[[t]]$. Мы можем взять элементы из k в качестве представителей поля вычетов, которое канонически изоморфно k. Максимальным идеалом в $k[[t]]$ является идеал, порожденный t.

Все это представляет собой алгебраизацию обычной ситуации, возникающей в теории функций комплексного переменного. Например, пусть z_0 — точка на комплексной плоскости и $\mathfrak{o}$ — кольцо функций, голоморфных в некотором круге с центром z_0. Тогда $\mathfrak{o}$ — кольцо дискретного нормирования, максимальный идеал которого состоит из тех функций, которые имеют нуль в z_0. Всякий элемент из $\mathfrak{o}$ обладает разложением в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu.$$

В качестве представителей поля вычетов могут быть взяты комплексные числа a_ν. Если $a_m \neq 0$, то говорят, что $f(z)$ имеет нуль порядка m. Порядок будет один и тот же, иметь ли в виду порядок относительно дискретного нормирования в алгебраическом смысле, или порядок в смысле теории функций комплексного переменного. Мы можем выбрать канонический униформизирующий параметр, а именно $z - z_0$ и

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

где $g(z)$ — степенной ряд, начинающийся с ненулевой константы. Таким образом, $g(z)$ обратим.

Пусть снова K — поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования, и E — конечное расширение K. Пусть $\mathfrak{o}_E$, $\mathfrak{m}_E$ — кольцо нормирования в E и его максимальный идеал, лежащие над $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{m}$ в K. Пусть Π — простой элемент в E. Если Γ_E и Γ_K — группы значений нормирований в E и K соответственно и

$$e = (\Gamma_E : \Gamma_K)$$

— индекс ветвления, то

$$|\Pi^e| = |\pi|,$$

а элементы

$$\Pi^i \pi^j, \qquad 0 \leqslant i \leqslant e - 1, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

имеют порядок $je + i$ в E.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_f$ — элементы из $\mathfrak{o}_E$, классы вычетов которых $\operatorname{mod} \mathfrak{m}_E$ образуют базис в $\mathfrak{o}_E/\mathfrak{m}_E$. Если R, как и выше, обозначает множество представителей поля $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{o}$, то множество, состоящее из всех элементов вида

$$a_1\omega_1 + \ldots + a_f\omega_f,$$

где $a_i \in R$, будет множеством представителей для $\mathfrak{o}_E/\mathfrak{m}_E$ в $\mathfrak{o}_E$. Отсюда видно, что всякий элемент из $\mathfrak{o}_E$ обладает сходящимся разложением

$$\sum_{i=0}^{e-1} \sum_{\nu=1}^{f} \sum_{j=0}^{\infty} a_{\nu, i, j} \pi^j \omega_\nu \Pi^i.$$

Таким образом, элементы $\{\omega_\nu \Pi^i\}$ образуют множество образующих $\mathfrak{o}_E$ как модуля над $\mathfrak{o}$. С другой стороны, мы видели в доказательстве предложения 13 из § 4, что эти элементы линейно независимы над K. Следовательно, получаем

Предложение 18. *Пусть K — поле, полное относительно дискретного нормирования, E — конечное расширение K и e, f — соответственно индекс ветвления и степень поля вычетов. Тогда*

$$ef = [E : K].$$

Следствие 1. *Пусть $\alpha \in E$, $\alpha \neq 0$, v — нормирование на K и w — его продолжение на E. Тогда*

$$\operatorname{ord}_v N_K^E(\alpha) = f(w \mid v) \operatorname{ord}_w \alpha.$$

Доказательство. Это вытекает непосредственно из формулы

$$|N_K^E(\alpha)| = |\alpha|^{ef}$$

и из определений.

Следствие 2. *Пусть K — произвольное поле и v — дискретное нормирование на K. Пусть E — конечное расширение поля K. Если v хорошо себя ведет в E (например, если E сепарабельно над K), то*

$$\sum_{w|v} e(w|v) f(w|v) = [E:K].$$

Если E — расширение Галуа над K, то все e_w равны одному и тому же числу e, а все f_w — одному и тому же числу f, так что

$$efr = [E:K],$$

где r — число продолжений v на E.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из нашего предположения и из предложения 8 § 3. Если E — расширение Галуа над K, то, как мы знаем из следствия 2 предложения 17 § 4, любые два нормирования поля E, лежащие над v, сопряжены. Следовательно, все индексы ветвления равны и то же самое верно для степеней полей вычетов. Наше соотношение $efr = [E:K]$ теперь очевидно.

§ 7. Нули многочленов в полных полях

Пусть K — поле, полное относительно некоторого нетривиального абсолютного значения.

Пусть

$$f(X) = \prod (X - \alpha_i)^{r_i}$$

— многочлен из $K[X]$ со старшим коэффициентом 1 и с различными корнями α_i кратностей r_i. Обозначим через d степень f. Пусть g — другой многочлен с коэффициентами из $\overline{K}$ также степени d и со старшим коэффициентом 1. Обозначим через $|g|$ — максимум абсолютных значений коэффициентов g. Легко видеть, что если величина $|g|$ ограничена, то абсолютные значения корней g также ограничены.

Предположим, что g близок к f в том смысле, что величина $|f - g|$ мала. Если β — корень g, то величина

$$|f(\beta) - g(\beta)| = |f(\beta)| = \prod |\alpha_i - \beta|^{r_i}$$