Доказательство. Это вытекает непосредственно из формулы

$$|N_K^E(\alpha)| = |\alpha|^{ef}$$

и из определений.

Следствие 2. *Пусть K — произвольное поле и v — дискретное нормирование на K. Пусть E — конечное расширение поля K. Если v хорошо себя ведет в E (например, если E сепарабельно над K), то*

$$\sum_{w|v} e(w|v)\, f(w|v) = [E : K].$$

Если E — расширение Галуа над K, то все e_w равны одному и тому же числу e, а все f_w — одному и тому же числу f, так что

$$efr = [E : K],$$

где r — число продолжений v на E.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из нашего предположения и из предложения 8 § 3. Если E — расширение Галуа над K, то, как мы знаем из следствия 2 предложения 17 § 4, любые два нормирования поля E, лежащие над v, сопряжены. Следовательно, все индексы ветвления равны и то же самое верно для степеней полей вычетов. Наше соотношение $efr = [E : K]$ теперь очевидно.

§ 7. Нули многочленов в полных полях

Пусть K — поле, полное относительно некоторого нетривиального абсолютного значения.

Пусть

$$f(X) = \prod (X - \alpha_i)^{r_i}$$

— многочлен из $K[X]$ со старшим коэффициентом 1 и с различными корнями α_i кратностей r_i. Обозначим через d степень f. Пусть g — другой многочлен с коэффициентами из $\overline{K}$ также степени d и со старшим коэффициентом 1. Обозначим через $|g|$ — максимум абсолютных значений коэффициентов g. Легко видеть, что если величина $|g|$ ограничена, то абсолютные значения корней g также ограничены.

Предположим, что g близок к f в том смысле, что величина $|f - g|$ мала. Если β — корень g, то величина

$$|f(\beta) - g(\beta)| = |f(\beta)| = \prod |\alpha_i - \beta|^{r_i}$$

мала и, следовательно, β должен быть близок к некоторому корню f. Если β близок, скажем, к $\alpha=\alpha_1$, то его расстояние до других корней f близко к расстоянию от α_1 до других корней, а потому ограничено снизу. В этом случае мы будем говорить, что β *принадлежит* α.

Предложение 19. *Если многочлен g достаточно близок к f и $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — корни g, принадлежащие α (с учетом кратностей), то $s=r_1$ есть кратность α в f.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда можно найти последовательность многочленов g_ν, стремящихся к f, у которых имеется точно s корней $\beta_1^{(\nu)}, \ldots, \beta_s^{(\nu)}$, принадлежащих β, причем $s \neq r_1$. (Мы можем брать многочлены с одним и тем же s, так как имеется лишь конечное число возможных значений для s.) Кроме того, остальные корни g_ν также принадлежат корням f, и мы можем предполагать, что эти корни сгруппированы в соответствии с тем, какому корню f они принадлежат. Так как $\lim g_\nu = f$, то заключаем, что α должен иметь кратность s в f — противоречие.

Исследуем теперь условия, при которых многочлен имеет корень в полном поле.

Предположим, что K — поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования с кольцом нормирования $\mathfrak{o}$ и максимальным идеалом $\mathfrak{p}$. Пусть π — фиксированный простой элемент в $\mathfrak{p}$.

Мы будем иметь дело с n-мерным пространством над $\mathfrak{o}$. Вектор $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in \mathfrak{o}$, будем обозначать через A. Будем говорить, что A — *нуль* многочлена $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{o}[X]$ от n переменных, если $f(A)=0$, и что A *нуль* f по модулю $\mathfrak{p}^m$, если $f(A) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^m}$.

Пусть $C=(c_0, \ldots, c_n)$ — вектор из $\mathfrak{o}^{(n+1)}$ и m — целое число $\geqslant 1$. Исследуем природу решений сравнения вида

$$\pi^m (c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{m+1}}. \qquad (*)$$

Это сравнение эквивалентно линейному сравнению

$$c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \qquad (**)$$

Если хоть один коэффициент c_i $(i=1, \ldots, n)$ не сравним с $0 \pmod{\mathfrak{p}}$, то множество решений не пусто и имеет обычную структуру решения одного неоднородного линейного уравнения над полем $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. В частности, оно имеет размерность $n-1$. Сравнение (*) или (**), где хотя бы одно $c_i \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, будет называться *собственным сравнением.*

Обозначим через $D_i f$ формальную частную производную от f по X_i и введем запись

$$\operatorname{grad} f(X) = (D_1 f(X), \ldots, D_n f(X)).$$

Предложение 20. *Пусть* $f(X) \in \mathfrak{o}[X]$ *и* r — *целое число* $\geqslant 1$. *Пусть* $A \in \mathfrak{o}^{(n)}$ — *вектор, такой, что*

$$f(A) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{2r-1}},$$
$$D_i f(A) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{r-1}} \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$D_i f(A) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{r}} \quad \text{для некоторого} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть ν — *целое число* $\geqslant 0$ *и* $B \in \mathfrak{o}^{(n)}$ — *вектор, для которого*

$$B \equiv A \pmod{\mathfrak{p}^{r}} \quad \text{и} \quad f(B) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{2r-1+\nu}}.$$

Вектор $Y \in \mathfrak{o}^{(n)}$ *тогда и только тогда удовлетворяет сравнениям*

$$Y \equiv B \pmod{\mathfrak{p}^{r+\nu}} \quad \text{и} \quad f(Y) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{2r+\nu}},$$

когда он может быть записан в виде $Y = B + \pi^{r+\nu}C$, *где* $C \in \mathfrak{o}^{(n)}$ — *некоторый вектор, удовлетворяющий собственному сравнению*

$$f(B) + \pi^{r+\nu} \operatorname{grad} f(B) \cdot C \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{2r+\nu}}.$$

Доказательство. Доказательство короче, чем формулировка предложения. Пусть $Y = B + \pi^{r+\nu}C$. Запишем разложение Тейлора

$$f(B + \pi^{r+\nu}C) = f(B) + \pi^{r+\nu} \operatorname{grad} f(B) \cdot C \pmod{\mathfrak{p}^{2r+2\nu}}.$$

Решая это сравнение по модулю $\mathfrak{p}^{2r+\nu}$, получаем, согласно предположению, собственное сравнение, поскольку

$$\operatorname{grad} f(B) \equiv \operatorname{grad} f(A) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{r-1}}.$$

Следствие 1. *В предпосылках предложения 20 существует нуль многочлена* f *в* $\mathfrak{o}^{(n)}$, *сравнимый с* $A \bmod \mathfrak{p}^{r}$.

Доказательство. Мы можем записать этот нуль в виде сходящегося ряда

$$A + \pi^{r}C_0 + \pi^{r+1}C_1 + \ldots,$$

вычисляя $C_0, C_1, \ldots$ индуктивно, как в предложении.

Следствие 2. *Пусть* f — *многочлен от одной переменной из* $\mathfrak{o}[X]$, *и пусть элемент* $a \in \mathfrak{o}$ *удовлетворяет условиям* $f(a) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, *но* $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. *Тогда существует элемент* $b \in \mathfrak{o}$, $b \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}$, *такой, что* $f(b) = 0$.

Доказательство. Возьмем в предложении $n = 1$ и $r = 1$ и применим следствие 1.

Следствие 3. *Пусть* m — *положительное целое число, не делящееся на характеристику поля* K. *Тогда существует целое число* r, *такое, что для всякого* $a \in \mathfrak{o}$, $a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{r}}$, *уравнение* $X^m - a = 0$ *имеет корень в* K.

Доказательство. Применить предложение.

Пример. В 2-адическом поле $\mathbf{Q}_2$ существует квадратный корень из -7, т. е. $\sqrt{-7} \in \mathbf{Q}_2$, так как $-7 = 1 - 8$.

(Об уточнениях предыдущего предложения см. N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Ch. III, § 4, 5.) В тех случаях, когда абсолютное значение недискретно, также можно сформулировать критерий существования нуля у многочлена.

Предложение 21. *Пусть K — поле, полное относительно неархимедова абсолютного значения (нетривиального). Пусть $\mathfrak{o}$ — его кольцо нормирования, $f(X) \in \mathfrak{o}[X]$ — многочлен от одной переменной, и пусть элемент $\alpha_0 \in \mathfrak{o}$ таков, что*

$$|f(\alpha_0)| < |f'(\alpha_0)^2|$$

(здесь f' обозначает формальную производную многочлена f). Тогда последовательность

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}$$

сходится к некоторому корню α многочлена f, лежащему в $\mathfrak{o}$, и имеет место неравенство

$$|\alpha - \alpha_0| \leqslant \left| \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)^2} \right| < 1.$$

Доказательство. Это легкое упражнение. Мы предоставляем детали читателю. Отметим, что здесь снова показатель 2 дает точное условие того, что приближенный корень можно поднять до настоящего корня. В тех случаях, когда абсолютное значение дискретно, предложение 21 превращается в частный случай предложения 20.

Техника, используемая в этом предложении, полезна также при рассмотрении некоторых колец, скажем локального кольца с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, таким, что $\mathfrak{m}^r = 0$ для некоторого целого r. Если имеется многочлен f из $\mathfrak{o}[X]$ и приближенный корень α_0, для которого $f'(\alpha_0) \not\equiv 0 \mod \mathfrak{m}$, то аппроксимационная последовательность Ньютона показывает, как поднять α_0 до корня f.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (а) Пусть K — поле с нормированием. Для всякого многочлена

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

из $K[X]$ определим $|f|$ как максимум значений $|a_i|$ $(i = 0, \ldots, n)$. Показать, что этим определяется нормирование в $K[X]$, а также что это нормирование может быть продолжено на поле рациональных функций $K(X)$. Почему лемма Гаусса является частным случаем предыдущего утверждения? Обобщить на многочлены от нескольких переменных.

(б) Пусть f — многочлен с комплексными коэффициентами. Определим $|f|$ как максимум абсолютных значений коэффициентов. Пусть d — целое число $\geqslant 1$.

Показать, что существуют константы C_1, C_2 (зависящие только от d), такие, что если f, g — многочлены из $\mathbf{C}[X]$ степени $\leqslant d$, то

$$C_1 |f| |g| \leqslant |fg| \leqslant C_2 |f| |g|.$$

[*Указание*: индукция по числу множителей степени 1. Отметим, что правое неравенство тривиально.]

2. Пусть $M_{\mathbf{Q}}$ — множество абсолютных значений, состоящее из обычного абсолютного значения и всех p-адических абсолютных значений v_p на поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Показать, что для любого рационального числа $a \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$, имеет место равенство

$$\prod_{v \in M_{\mathbf{Q}}} |a|_v = 1.$$

Пусть K — конечное расширение $\mathbf{Q}$ и M_K обозначает множество абсолютных значений на K, продолжающих абсолютные значения из $M_{\mathbf{Q}}$, и для всякого $w \in M_K$ пусть N_w — локальная степень $[K_w : \mathbf{Q}_v]$. Показать, что для $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, имеет место равенство

$$\prod_{w \in M_K} |\alpha|_w^{N_w} = 1.$$

3. Показать, что поле p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$ не имеет других автоморфизмов, кроме тождественного. [*Указание*: показать, что такие автоморфизмы непрерывны в p-адической топологии. Использовать следствие 3 предложения 20 в качестве алгебраической характеристики элементов, близких к 1.]

4. Пусть A — целостное кольцо главных идеалов, K — его поле частных и $\mathfrak{o}$ — кольцо нормирования в K, содержащее A, причем $\mathfrak{o} \neq K$. Показать, что $\mathfrak{o}$ есть локальное кольцо $A_{(p)}$ для некоторого простого элемента p. [Это применимо и к кольцу $\mathbf{Z}$, и к кольцу многочленов $k[X]$ над полем k.]

5. Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных. Предположим, что всякий конечно порожденный идеал в A — главный. Пусть $\mathfrak{o}$ — дискретное кольцо нормирования в K, содержащее A. Показать, что $\mathfrak{o} = A_{(p)}$ для некоторого элемента p из A и что p — образующая максимального идеала в $\mathfrak{o}$

6. (Исс'са) Пусть K — поле мероморфных функций на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и $\mathfrak{o}$ — кольцо дискретного нормирования в K (содержащее поле констант $\mathbf{C}$). Показать, что функция z лежит в $\mathfrak{o}$ [*Указание*: пусть a_1, a_2, ... — дискретная последовательность комплексных чисел, сходящихся к бесконечности, например последовательность целых положительных чисел, p — некоторое простое число и ν_1, ν_2, ... — последовательность целых чисел, $0 \leqslant \nu_i \leqslant p-1$, для которой $\sum \nu_i p^i$ не является p-адическим разложением рационального числа. Пусть f — целая функция, имеющая нуль порядка $\nu_i p^i$ в a_i для всякого i и не имеющая никаких других нулей. Если z не содержится в $\mathfrak{o}$, то рассмотреть дробь

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{n} (z - a_i)^{\nu_i p^i}}.$$

Пользуясь вейерштрассовским разложением целой функции, показать, что $g(z) = h(z)^{p^{n+1}}$ для некоторой целой функции $h(z)$.

Вычисляя теперь порядок нуля g относительно дискретного нормирования, определенного кольцом $\mathfrak{o}$, через порядки нуля f и $\prod (z-\alpha_i)^{\nu_i p^t}$, получить противоречие]

Показать, что если U — некомпактная риманова поверхность, L — поле мероморфных функций на U и $\mathfrak{o}$ — кольцо дискретного нормирования в L, содержащее константы, то всякая голоморфная функция φ на U лежит в $\mathfrak{o}$ [*Указание* рассмотреть отображение $\varphi\colon U \to \mathbf{C}$ и получить дискретное нормирование на K, компонируя φ с мероморфными функциями на $\mathbf{C}$ Затем применить первую часть упражнения] Показать, что кольцо нормирования — это кольцо, ассоциированное с точкой на римановой поверхности [*Дальнейшее указание* если вы не знакомы с римановыми поверхностями, то сделайте это для комплексной плоскости Для всякого $z \in U$ пусть f_z — функция, голоморфная на U и имеющая только нуль порядка 1 в z Показать что если для некоторого z_0 функция f_{z_0} имеет порядок $\geqslant 1$ в $\mathfrak{o}$, то $\mathfrak{o}$ — кольцо нормирования, ассоциированное с z_0 Иными словами, всякая другая функция f_z имеет порядок 0 в $\mathfrak{o}$ Убедиться посредством приема аналогичного использованному в первой части упражнения, что нормирование, определяемое кольцом $\mathfrak{o}$, тривиально на любой голоморфной функции]

7. *Снова векторы Витта* Пусть k — совершенное поле характеристики p Мы будем использовать векторы Витта в той форме, в какой они описаны в упражнениях из гл VIII На $W(k)$ можно определить абсолютное значение, а именно $|x| = p^{-r}$, если x_r — первая ненулевая компонента x Показать, что это действительно абсолютное значение, очевидно, дискретное, определенное на кольце и допускающее продолжение на поле частных Показать, что последнее поле — полное, и заметить, что $W(k)$ — кольцо нормирования Максимальный идеал состоит из тех x, у которых $x_0 = 0$, т е равен $pW(k)$

8. Пусть F — поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования, $\mathfrak{o}$ — соответствующее кольцо нормирования и π — простой элемент, причем поле $\mathfrak{o}/(\pi) = k$ имеет характеристику p Доказать, что если $a, b \in \mathfrak{o}$ и $a \equiv b \pmod{\pi^r}$, где $r > 0$, то $a^{p^n} \equiv b^{p^n} \pmod{\pi^{r+n}}$ для всех целых $n \geqslant 0$

9. Пусть F обозначает то же, что и выше Показать, что в $\mathfrak{o}$ существует система представителей R для $\mathfrak{o}/(\pi)$, такая, что $R^p = R$ и что такая система единственна (Тейхмюллер) [*Указание* пусть α — некоторый класс вычетов из k Для всякого $\nu \geqslant 0$ пусть a_ν — представитель в $\mathfrak{o}$ класса $\alpha^{p^{-\nu}}$, показать, что последовательность $a_\nu^{p^\nu}$ сходится при $\nu \to \infty$ и притом к представителю a класса α, не зависящему от выбора a_ν] Показать, что полученная таким образом система представителей R замкнута относительно умножения и что если F имеет характеристику p, то система R замкнута также относительно сложения, а значит, изоморфна k

10. Предположим, что F имеет характеристику 0. Сопоставим каждому вектору $x \in W(k)$ элемент

$$\sum \xi_i^{p^{-i}} p^i,$$

где ξ_i — представитель x_i в специальной системе из предыдущего упражнения Показать, что это отображение дает вложение $W(k)$ в $\mathfrak{o}$

11. (*Локальная униформизация*) Пусть k — поле, K — конечно порожденное расширение степени трансцендентности 1 и $\mathfrak{o}$ — кольцо дискретного нормирования поля K над k с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ Предположим, что $\mathfrak{o}/\mathfrak{m} = k$ и что K сепарабельно над $k(x)$, где x — некоторая образующая $\mathfrak{m}$.

Показать, что существует элемент $y \in \mathfrak{o}$, такой, что $K = k(x, y)$, и обладающий также следующим свойством.

Если φ — точка поля K, определенная кольцом $\mathfrak{o}$, $a = \varphi(x)$, $b = \varphi(y)$ (разумеется, $a = 0$) и $f(X, Y)$ — неприводимый многочлен из $k[X, Y]$, для которого $f(x, y) = 0$, то $D_2 f(a, b) \neq 0$. [*Указание*: записать сначала $K = k(x, z)$, где элемент z — целый над $k[x]$. Пусть $z = z_1, \ldots, z_n$ ($n \geqslant 2$) — элементы, сопряженные с z над $k(x)$. Продолжить $\mathfrak{o}$ до кольца нормирования $\mathfrak{O}$ поля $k(z_1, \ldots, z_n)$. Рассмотреть

$$z = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r + \ldots$$

— разложение z в степенной ряд с $a_i \in k$ и ввести $P_r(x) = a_0 + \ldots + a_r x^r$. Для $i = 1, \ldots, n$ положить

$$y_i = \frac{z_i - P_r(x)}{x^r}.$$

Взяв r достаточно большим, показать, что y_1 не имеет полюса в $\mathfrak{O}$, но $y_2, \ldots, y_n$ имеют полюса в $\mathfrak{O}$. Элементы $y_1, \ldots, y_n$ сопряжены над $k(x)$. Пусть $f(X, Y)$ — неприводимый многочлен пары (x, y) над k. Тогда $f(x, Y) = \psi_n(x) Y^n + \ldots + \psi_0(x)$, где $\psi_i(x) \in k[x]$. Можно также предполагать, что $\psi_i(0) \neq 0$ (так как f неприводим). Записать $f(x, Y)$ в виде

$$f(x, Y) = \psi_n(x) y_2 \ldots y_n (Y - y_1)\left(y_2^{-1} Y - 1\right) \ldots \left(y_n^{-1} Y - 1\right).$$

Показать, что $\psi_n(x) y_2 \ldots y_n = u$ не имеет полюса в $\mathfrak{O}$. Пусть $\overline{w}$ обозначает класс вычета элемента $w \in \mathfrak{O}$ по модулю максимального идеала в $\mathfrak{O}$. Тогда

$$0 \neq f(\overline{x}, Y) = (-1)^{n-1} \overline{u} (Y - \overline{y}_1).$$

Положив $y = y_1$, $\overline{y} = b$, найти, что $D_2 f(a, b) = (-1)^{n-1} \overline{u} \neq 0$.]

12. Доказать обращение упражнения 11: если $K = k(x, y)$, $f(X, Y)$ — неприводимый многочлен пары (x, y) над k и если элементы a, $b \in k$ таковы, что $f(a, b) = 0$, но $D_2 f(a, b) \neq 0$, то существует однозначно определенное кольцо нормирования $\mathfrak{o}$ поля K с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, такое, что $x \equiv a \pmod{\mathfrak{m}}$ и $y \equiv b \pmod{\mathfrak{m}}$. Кроме того, $\mathfrak{o}/\mathfrak{m} = k$ и $x - a$ — образующая $\mathfrak{m}$. [*Указание*: показать, что если $g(x, y) \in k[x, y]$ — элемент, для которого $g(a, b) = 0$, то $g(x, y) = (x - a) A(x, y)/B(x, y)$, где A, B — такие многочлены, что $B(a, b) \neq 0$. Если $A(a, b) = 0$, то повторить процесс. Показать, что процесс не может повторяться бесконечно и приводит к доказательству требуемого утверждения.]

13. Пусть K — поле характеристики 0, полное относительно некоторого неархимедова абсолютного значения. Показать, что ряды

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

сходятся в некоторой окрестности 0. (Основная трудность возникает в случае, когда характеристика поля вычетов равна $p > 0$, так как p делит знаменатели $n!$ и n. Получить выражение для показателя степени, в которой p встречается в $n!$) Доказать, что exp и log дают отображения, обратные друг другу, из окрестности 0 в окрестность 1.

14. Пусть поле K, так же как в предыдущем упражнении, имеет характеристику 0 и является полным относительно некоторого неархимедова абсолютного значения. Показать, что при любом целом $n > 0$ обычное биномиальное разложение для $(1 + x)^{1/n}$ сходится в некоторой окрестности 0. Сделать

это сначала в предположении, что характеристика поля вычетов не делит n; в этом случае доказательство утверждения намного проще.

15. Пусть $\mathbf{Q}_p$ — p-адическое поле. Показать, что $\mathbf{Q}_p$ содержит бесконечно много квадратичных полей вида $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, где m — целое положительное число.

16. Показать, что кольцо целых p-адических чисел $\mathbf{Z}_p$ компактно. Показать, что группа единиц в $\mathbf{Z}_p$ компактна.

17. Пусть K — поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования с конечным полем вычетов и $\mathfrak{o}$ — кольцо элементов поля K, порядки которых $\geqslant 0$. Показать, что $\mathfrak{o}$ компактно. Показать, что группа единиц кольца $\mathfrak{o}$ замкнута в $\mathfrak{o}$ и компактна.

18. Пусть K — поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования, и $\mathfrak{o}$ — кольцо целых элементов поля K, причем $\mathfrak{o}$ компактно. Пусть $f_1, f_2, \ldots$ — последовательность многочленов от n переменных с коэффициентами в $\mathfrak{o}$. Предположим, что все эти многочлены имеют степень $\leqslant d$ и что они сходятся к многочлену f (т. е. $|f - f_i| \to 0$ при $i \to \infty$). Показать, что если каждый f_i имеет нуль в $\mathfrak{o}$, то f также имеет нуль в $\mathfrak{o}$. Показать, что если многочлены f_i однородны степени d и каждый f_i имеет нетривиальный нуль в $\mathfrak{o}$, то f имеет нетривиальный нуль в $\mathfrak{o}$. [*Указание*: использовать компактность кольца $\mathfrak{o}$ и для однородного случая — компактность группы единиц в $\mathfrak{o}$.] (О приложениях этого упражнения, а также предложения 21 см статью Lang S., On quasi-algebraic closure, *Ann. Math.*, 1951.)

19. Показать, что если p, p' — два различных простых числа, то поля $\mathbf{Q}_p$ и $\mathbf{Q}_{p'}$ неизоморфны.

20. Доказать, что поле $\mathbf{Q}_p$ содержит все корни $(p-1)$-й степени из единицы. [*Указание*: использовать предложение 21, применив его к многочлену $X^{p-1} - 1$, который разлагается в поле вычетов на множители степени 1.] Показать, что два различных корня $(p-1)$-й степени из единицы не могут быть сравнимы по модулю p.