Доказательство. Это вытекает непосредственно из формулы

$$|N_K^E(\alpha)| = |\alpha|^{ef}$$

и из определений.

Следствие 2. *Пусть $K$ — произвольное поле и $v$ — дискретное нормирование на $K$. Пусть $E$ — конечное расширение поля $K$. Если $v$ хорошо себя ведет в $E$ (например, если $E$ сепарабельно над $K$), то*

$$\sum_{w \mid v} e(w \mid v) f(w \mid v) = [E : K].$$

*Если $E$ — расширение Галуа над $K$, то все $e_w$ равны одному и тому же числу $e$, а все $f_w$ — одному и тому же числу $f$, так что*

$$efr = [E : K],$$

*где $r$ — число продолжений $v$ на $E$.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из нашего предположения и из предложения 8 § 3. Если $E$ — расширение Галуа над $K$, то, как мы знаем из следствия 2 предложения 17 § 4, любые два нормирования поля $E$, лежащие над $v$, сопряжены. Следовательно, все индексы ветвления равны и то же самое верно для степеней полей вычетов. Наше соотношение $efr = [E : K]$ теперь очевидно.

## § 7. Нули многочленов в полных полях

*Пусть $K$ — поле, полное относительно некоторого нетривиального абсолютного значения.*

Пусть

$$f(X) = \prod (X - \alpha_i)^{r_i}$$

— многочлен из $K[X]$ со старшим коэффициентом 1 и с различными корнями $\alpha_i$ кратностей $r_i$. Обозначим через $d$ степень $f$. Пусть $g$ — другой многочлен с коэффициентами из $\overline{K}$ также степени $d$ и со старшим коэффициентом 1. Обозначим через $|g|$ — максимум абсолютных значений коэффициентов $g$. Легко видеть, что если величина $|g|$ ограничена, то абсолютные значения корней $g$ также ограничены.

Предположим, что $g$ близок к $f$ в том смысле, что величина $|f - g|$ мала. Если $\beta$ — корень $g$, то величина

$$|f(\beta) - g(\beta)| = |f(\beta)| = \prod |\alpha_i - \beta|^{r_i}$$

мала и, следовательно, $\beta$ должен быть близок к некоторому корню $f$. Если $\beta$ близок, скажем, к $\alpha=\alpha_1$, то его расстояние до других корней $f$ близко к расстоянию от $\alpha_1$ до других корней, а потому ограничено снизу. В этом случае мы будем говорить, что $\beta$ *принадлежит* $\alpha$.

Предложение 19. *Если многочлен $g$ достаточно близок к $f$ и $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — корни $g$, принадлежащие $\alpha$ (с учетом кратностей), то $s=r_1$ есть кратность $\alpha$ в $f$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда можно найти последовательность многочленов $g_\nu$, стремящихся к $f$, у которых имеется точно $s$ корней $\beta_1^{(\nu)}, \ldots, \beta_s^{(\nu)}$, принадлежащих $\beta$, причем $s \neq r_1$. (Мы можем брать многочлены с одним и тем же $s$, так как имеется лишь конечное число возможных значений для $s$.) Кроме того, остальные корни $g_\nu$ также принадлежат корням $f$, и мы можем предполагать, что эти корни сгруппированы в соответствии с тем, какому корню $f$ они принадлежат. Так как $\lim g_\nu = f$, то заключаем, что $\alpha$ должен иметь кратность $s$ в $f$ — противоречие.

Исследуем теперь условия, при которых многочлен имеет корень в полном поле.

*Предположим, что $K$ — поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования с кольцом нормирования $\mathfrak{o}$ и максимальным идеалом $\mathfrak{p}$.* Пусть $\pi$ — фиксированный простой элемент в $\mathfrak{p}$.

Мы будем иметь дело с $n$-мерным пространством над $\mathfrak{o}$. Вектор $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in \mathfrak{o}$, будем обозначать через $A$. Будем говорить, что $A$ — *нуль* многочлена $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{o}[X]$ от $n$ переменных, если $f(A)=0$, и что $A$ *нуль* $f$ по модулю $\mathfrak{p}^m$, если $f(A) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^m}$.

Пусть $C=(c_0, \ldots, c_n)$ — вектор из $\mathfrak{o}^{(n+1)}$ и $m$ — целое число $\geqslant 1$. Исследуем природу решений сравнения вида

$$\pi^m (c_0+c_1x_1+ \ldots +c_nx_n) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{m+1}}. \tag{*}$$

Это сравнение эквивалентно линейному сравнению

$$c_0+c_1x_1+ \ldots +c_nx_n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{**}$$

Если хоть один коэффициент $c_i$ $(i=1, \ldots, n)$ не сравним с $0 \pmod{\mathfrak{p}}$, то множество решений не пусто и имеет обычную структуру решения одного неоднородного линейного уравнения над полем $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. В частности, оно имеет размерность $n-1$. Сравнение (*) или (**), где хотя бы одно $c_i \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, будет называться *собственным сравнением*.

Обозначим через $D_i f$ формальную частную производную от $f$ по $X_i$ и введем запись

$$\operatorname{grad} f(X) = (D_1 f(X), \ldots, D_n f(X)).$$

Предложение 20. *Пусть* $f(X) \in \mathfrak{o}[X]$ *и* $r$ — *целое число* $\geqslant 1$. *Пусть* $A \in \mathfrak{o}^{(n)}$ — *вектор, такой, что*

$$f(A) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{2r-1}},$$
$$D_i f(A) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{r-1}} \quad \textit{для всех} \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$D_i f(A) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{r}} \quad \textit{для некоторого} \quad i = 1, \ldots, n.$$

*Пусть* $\nu$ — *целое число* $\geqslant 0$ *и* $B \in \mathfrak{o}^{(n)}$ — *вектор, для которого*

$$B \equiv A \pmod{\mathfrak{p}^{r}} \quad \textit{и} \quad f(B) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{2r-1+\nu}}.$$

*Вектор* $Y \in \mathfrak{o}^{(n)}$ *тогда и только тогда удовлетворяет сравнениям*

$$Y \equiv B \pmod{\mathfrak{p}^{r+\nu}} \quad \textit{и} \quad f(Y) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{2r+\nu}},$$

*когда он может быть записан в виде* $Y = B + \pi^{r+\nu}C$, *где* $C \in \mathfrak{o}^{(n)}$ — *некоторый вектор, удовлетворяющий собственному сравнению*

$$f(B) + \pi^{r+\nu} \operatorname{grad} f(B) \cdot C \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{2r+\nu}}.$$

Доказательство. Доказательство короче, чем формулировка предложения. Пусть $Y = B + \pi^{r+\nu}C$. Запишем разложение Тейлора

$$f(B + \pi^{r+\nu}C) = f(B) + \pi^{r+\nu} \operatorname{grad} f(B) \cdot C \pmod{\mathfrak{p}^{2r+2\nu}}.$$

Решая это сравнение по модулю $\mathfrak{p}^{2r+\nu}$, получаем, согласно предположению, собственное сравнение, поскольку

$$\operatorname{grad} f(B) \equiv \operatorname{grad} f(A) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{r-1}}.$$

Следствие 1. *В предпосылках предложения 20 существует нуль многочлена* $f$ *в* $\mathfrak{o}^{(n)}$, *сравнимый с* $A \bmod \mathfrak{p}^{r}$.

Доказательство. Мы можем записать этот нуль в виде сходящегося ряда

$$A + \pi^{r}C_0 + \pi^{r+1}C_1 + \ldots,$$

вычисляя $C_0, C_1, \ldots$ индуктивно, как в предложении.

Следствие 2. *Пусть* $f$ — *многочлен от одной переменной из* $\mathfrak{o}[X]$, *и пусть элемент* $a \in \mathfrak{o}$ *удовлетворяет условиям* $f(a) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, *но* $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. *Тогда существует элемент* $b \in \mathfrak{o}$, $b \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}$, *такой, что* $f(b) = 0$.

Доказательство. Возьмем в предложении $n = 1$ и $r = 1$ и применим следствие 1.

Следствие 3. *Пусть* $m$ — *положительное целое число, не делящееся на характеристику поля* $K$. *Тогда существует целое число* $r$, *такое, что для всякого* $a \in \mathfrak{o}$, $a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{r}}$, *уравнение* $X^m - a = 0$ *имеет корень в* $K$.

Доказательство. Применить предложение.

Пример. В 2-адическом поле $\mathbf{Q}_2$ существует квадратный корень из $-7$, т. е. $\sqrt{-7} \in \mathbf{Q}_2$, так как $-7 = 1 - 8$.

(Об уточнениях предыдущего предложения см. N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Ch. III, § 4, 5.) В тех случаях, когда абсолютное значение недискретно, также можно сформулировать критерий существования нуля у многочлена.

Предложение 21. *Пусть $K$ — поле, полное относительно неархимедова абсолютного значения (нетривиального). Пусть $\mathfrak{o}$ — его кольцо нормирования, $f(X) \in \mathfrak{o}[X]$ — многочлен от одной переменной, и пусть элемент $\alpha_0 \in \mathfrak{o}$ таков, что*

$$|f(\alpha_0)| < |f'(\alpha_0)^2|$$

*(здесь $f'$ обозначает формальную производную многочлена $f$). Тогда последовательность*

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}$$

*сходится к некоторому корню $\alpha$ многочлена $f$, лежащему в $\mathfrak{o}$, и имеет место неравенство*

$$|\alpha - \alpha_0| \leqslant \left| \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)^2} \right| < 1.$$

Доказательство. Это легкое упражнение. Мы предоставляем детали читателю. Отметим, что здесь снова показатель 2 дает точное условие того, что приближенный корень можно поднять до настоящего корня. В тех случаях, когда абсолютное значение дискретно, предложение 21 превращается в частный случай предложения 20.

Техника, используемая в этом предложении, полезна также при рассмотрении некоторых колец, скажем локального кольца с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, таким, что $\mathfrak{m}^r = 0$ для некоторого целого $r$. Если имеется многочлен $f$ из $\mathfrak{o}[X]$ и приближенный корень $\alpha_0$, для которого $f'(\alpha_0) \not\equiv 0 \mod \mathfrak{m}$, то аппроксимационная последовательность Ньютона показывает, как поднять $\alpha_0$ до корня $f$.

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** (а) Пусть $K$ — поле с нормированием. Для всякого многочлена

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

из $K[X]$ определим $|f|$ как максимум значений $|a_i|$ ($i = 0, \ldots, n$). Показать, что этим определяется нормирование в $K[X]$, а также что это нормирование может быть продолжено на поле рациональных функций $K(X)$. Почему лемма Гаусса является частным случаем предыдущего утверждения? Обобщить на многочлены от нескольких переменных.

(б) Пусть $f$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Определим $|f|$ как максимум абсолютных значений коэффициентов. Пусть $d$ — целое число $\geqslant 1$.

Показать, что существуют константы $C_1$, $C_2$ (зависящие только от $d$), такие, что если $f$, $g$ — многочлены из $\mathbf{C}[X]$ степени $\leqslant d$, то

$$C_1 |f| |g| \leqslant |fg| \leqslant C_2 |f| |g|.$$

[*Указание*: индукция по числу множителей степени 1. Отметим, что правое неравенство тривиально.]

2. Пусть $M_{\mathbf{Q}}$ — множество абсолютных значений, состоящее из обычного абсолютного значения и всех $p$-адических абсолютных значений $v_p$ на поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Показать, что для любого рационального числа $a \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$, имеет место равенство

$$\prod_{v \in M_{\mathbf{Q}}} |a|_v = 1.$$

Пусть $K$ — конечное расширение $\mathbf{Q}$ и $M_K$ обозначает множество абсолютных значений на $K$, продолжающих абсолютные значения из $M_{\mathbf{Q}}$, и для всякого $w \in M_K$ пусть $N_w$ — локальная степень $[K_w : \mathbf{Q}_v]$. Показать, что для $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, имеет место равенство

$$\prod_{w \in M_K} |\alpha|_w^{N_w} = 1.$$

3. Показать, что поле $p$-адических чисел $\mathbf{Q}_p$ не имеет других автоморфизмов, кроме тождественного. [*Указание*: показать, что такие автоморфизмы непрерывны в $p$-адической топологии. Использовать следствие 3 предложения 20 в качестве алгебраической характеристики элементов, близких к 1.]

4. Пусть $A$ — целостное кольцо главных идеалов, $K$ — его поле частных и $\mathfrak{o}$ — кольцо нормирования в $K$, содержащее $A$, причем $\mathfrak{o} \neq K$. Показать, что $\mathfrak{o}$ есть локальное кольцо $A_{(p)}$ для некоторого простого элемента $p$. [Это применимо и к кольцу $\mathbf{Z}$, и к кольцу многочленов $k[X]$ над полем $k$.]

5. Пусть $A$ — целостное кольцо, $K$ — его поле частных. Предположим, что всякий конечно порожденный идеал в $A$ — главный. Пусть $\mathfrak{o}$ — дискретное кольцо нормирования в $K$, содержащее $A$. Показать, что $\mathfrak{o} = A_{(p)}$ для некоторого элемента $p$ из $A$ и что $p$ — образующая максимального идеала в $\mathfrak{o}$

6. (Исс'са) Пусть $K$ — поле мероморфных функций на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и $\mathfrak{o}$ — кольцо дискретного нормирования в $K$ (содержащее поле констант $\mathbf{C}$). Показать, что функция $z$ лежит в $\mathfrak{o}$ [*Указание*: пусть $a_1$, $a_2$, ... — дискретная последовательность комплексных чисел, сходящихся к бесконечности, например последовательность целых положительных чисел, $p$ — некоторое простое число и $\nu_1$, $\nu_2$, ... — последовательность целых чисел, $0 \leqslant \nu_i \leqslant p-1$, для которой $\sum \nu_i p^i$ не является $p$-адическим разложением рационального числа. Пусть $f$ — целая функция, имеющая нуль порядка $\nu_i p^i$ в $a_i$ для всякого $i$ и не имеющая никаких других нулей. Если $z$ не содержится в $\mathfrak{o}$, то рассмотреть дробь

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{n} (z - a_i)^{\nu_i p^i}}.$$

Пользуясь вейерштрассовским разложением целой функции, показать, что $g(z) = h(z)^{p^{n+1}}$ для некоторой целой функции $h(z)$.

Вычисляя теперь порядок нуля $g$ относительно дискретного нормирования, определенного кольцом $\mathfrak{o}$, через порядки нуля $f$ и $\prod (z-\alpha_i)^{\nu_i p^i}$, получить противоречие ]

Показать, что если $U$ — некомпактная риманова поверхность, $L$ — поле мероморфных функций на $U$ и $\mathfrak{o}$ — кольцо дискретного нормирования в $L$, содержащее константы, то всякая голоморфная функция $\varphi$ на $U$ лежит в $\mathfrak{o}$ [*Указание* рассмотреть отображение $\varphi\colon U \to \mathbf{C}$ и получить дискретное нормирование на $K$, компонируя $\varphi$ с мероморфными функциями на $\mathbf{C}$ Затем применить первую часть упражнения ] Показать, что кольцо нормирования — это кольцо, ассоциированное с точкой на римановой поверхности [*Дальнейшее указание* если вы не знакомы с римановыми поверхностями, то сделайте это для комплексной плоскости Для всякого $z \in U$ пусть $f_z$ — функция, голоморфная на $U$ и имеющая только нуль порядка 1 в $z$ Показать что если для некоторого $z_0$ функция $f_{z_0}$ имеет порядок $\geqslant 1$ в $\mathfrak{o}$, то $\mathfrak{o}$ — кольцо нормирования, ассоциированное с $z_0$ Иными словами, всякая другая функция $f_z$ имеет порядок 0 в $\mathfrak{o}$ Убедиться посредством приема аналогичного использованному в первой части упражнения, что нормирование, определяемое кольцом $\mathfrak{o}$, тривиально на любой голоморфной функции ]

7. *Снова векторы Витта* Пусть $k$ — совершенное поле характеристики $p$ Мы будем использовать векторы Витта в той форме, в какой они описаны в упражнениях из гл VIII На $W(k)$ можно определить абсолютное значение, а именно $|x| = p^{-r}$, если $x_r$ — первая ненулевая компонента $x$ Показать, что это действительно абсолютное значение, очевидно, дискретное, определенное на кольце и допускающее продолжение на поле частных Показать, что последнее поле — полное, и заметить, что $W(k)$ — кольцо нормирования Максимальный идеал состоит из тех $x$, у которых $x_0 = 0$, т е равен $pW(k)$

8. Пусть $F$ — поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования, $\mathfrak{o}$ — соответствующее кольцо нормирования и $\pi$ — простой элемент, причем поле $\mathfrak{o}/(\pi) = k$ имеет характеристику $p$ Доказать, что если $a, b \in \mathfrak{o}$ и $a \equiv b \pmod{\pi^r}$, где $r > 0$, то $a^{p^n} \equiv b^{p^n} \pmod{\pi^{r+n}}$ для всех целых $n \geqslant 0$

9. Пусть $F$ обозначает то же, что и выше Показать, что в $\mathfrak{o}$ существует система представителей $R$ для $\mathfrak{o}/(\pi)$, такая, что $R^p = R$ и что такая система единственна (Тейхмюллер) [*Указание* пусть $\alpha$ — некоторый класс вычетов из $k$ Для всякого $\nu \geqslant 0$ пусть $a_\nu$ — представитель в $\mathfrak{o}$ класса $\alpha^{p^{-\nu}}$, показать, что последовательность $a_\nu^{p^\nu}$ сходится при $\nu \to \infty$ и притом к представителю $a$ класса $\alpha$, не зависящему от выбора $a_\nu$ ] Показать, что полученная таким образом система представителей $R$ замкнута относительно умножения и что если $F$ имеет характеристику $p$, то система $R$ замкнута также относительно сложения, а значит, изоморфна $k$

10. Предположим, что $F$ имеет характеристику 0. Сопоставим каждому вектору $x \in W(k)$ элемент

$$\sum \xi_i^{p^{-i}} p^i,$$

где $\xi_i$ — представитель $x_i$ в специальной системе из предыдущего упражнения Показать, что это отображение дает вложение $W(k)$ в $\mathfrak{o}$

11. (*Локальная униформизация*) Пусть $k$ — поле, $K$ — конечно порожденное расширение степени трансцендентности 1 и $\mathfrak{o}$ — кольцо дискретного нормирования поля $K$ над $k$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ Предположим, что $\mathfrak{o}/\mathfrak{m} = k$ и что $K$ сепарабельно над $k(x)$, где $x$ — некоторая образующая $\mathfrak{m}$.

Показать, что существует элемент $y \in \mathfrak{o}$, такой, что $K = k(x, y)$, и обладающий также следующим свойством.

Если $\varphi$ — точка поля $K$, определенная кольцом $\mathfrak{o}$, $a = \varphi(x)$, $b = \varphi(y)$ (разумеется, $a = 0$) и $f(X, Y)$ — неприводимый многочлен из $k[X, Y]$, для которого $f(x, y) = 0$, то $D_2 f(a, b) \neq 0$. [*Указание*: записать сначала $K = k(x, z)$, где элемент $z$ — целый над $k[x]$. Пусть $z = z_1, \ldots, z_n$ ($n \geqslant 2$) — элементы, сопряженные с $z$ над $k(x)$. Продолжить $\mathfrak{o}$ до кольца нормирования $\mathfrak{O}$ поля $k(z_1, \ldots, z_n)$. Рассмотреть

$$z = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r + \ldots$$

— разложение $z$ в степенной ряд с $a_i \in k$ и ввести $P_r(x) = a_0 + \ldots + a_r x^r$. Для $i = 1, \ldots, n$ положить

$$y_i = \frac{z_i - P_r(x)}{x^r}.$$

Взяв $r$ достаточно большим, показать, что $y_1$ не имеет полюса в $\mathfrak{O}$, но $y_2, \ldots, y_n$ имеют полюса в $\mathfrak{O}$. Элементы $y_1, \ldots, y_n$ сопряжены над $k(x)$. Пусть $f(X, Y)$ — неприводимый многочлен пары $(x, y)$ над $k$. Тогда $f(x, Y) = \psi_n(x) Y^n + \ldots + \psi_0(x)$, где $\psi_i(x) \in k[x]$. Можно также предполагать, что $\psi_i(0) \neq 0$ (так как $f$ неприводим). Записать $f(x, Y)$ в виде

$$f(x, Y) = \psi_n(x) y_2 \ldots y_n (Y - y_1) \left(y_2^{-1} Y - 1\right) \ldots \left(y_n^{-1} Y - 1\right).$$

Показать, что $\psi_n(x) y_2 \ldots y_n = u$ не имеет полюса в $\mathfrak{O}$. Пусть $\overline{w}$ обозначает класс вычета элемента $w \in \mathfrak{O}$ по модулю максимального идеала в $\mathfrak{O}$. Тогда

$$0 \neq f(\overline{x}, Y) = (-1)^{n-1} \overline{u} (Y - \overline{y}_1).$$

Положив $y = y_1$, $\overline{y} = b$, найти, что $D_2 f(a, b) = (-1)^{n-1} \overline{u} \neq 0$.]

**12.** Доказать обращение упражнения 11: если $K = k(x, y)$, $f(X, Y)$ — неприводимый многочлен пары $(x, y)$ над $k$ и если элементы $a$, $b \in k$ таковы, что $f(a, b) = 0$, но $D_2 f(a, b) \neq 0$, то существует однозначно определенное кольцо нормирования $\mathfrak{o}$ поля $K$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, такое, что $x \equiv a \pmod{\mathfrak{m}}$ и $y \equiv b \pmod{\mathfrak{m}}$. Кроме того, $\mathfrak{o}/\mathfrak{m} = k$ и $x - a$ — образующая $\mathfrak{m}$. [*Указание*: показать, что если $g(x, y) \in k[x, y]$ — элемент, для которого $g(a, b) = 0$, то $g(x, y) = (x - a) A(x, y)/B(x, y)$, где $A$, $B$ — такие многочлены, что $B(a, b) \neq 0$. Если $A(a, b) = 0$, то повторить процесс. Показать, что процесс не может повторяться бесконечно и приводит к доказательству требуемого утверждения.]

**13.** Пусть $K$ — поле характеристики 0, полное относительно некоторого неархимедова абсолютного значения. Показать, что ряды

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

сходятся в некоторой окрестности 0. (Основная трудность возникает в случае, когда характеристика поля вычетов равна $p > 0$, так как $p$ делит знаменатели $n!$ и $n$. Получить выражение для показателя степени, в которой $p$ встречается в $n!$) Доказать, что exp и log дают отображения, обратные друг другу, из окрестности 0 в окрестность 1.

**14.** Пусть поле $K$, так же как в предыдущем упражнении, имеет характеристику 0 и является полным относительно некоторого неархимедова абсолютного значения. Показать, что при любом целом $n > 0$ обычное биномиальное разложение для $(1 + x)^{1/n}$ сходится в некоторой окрестности 0. Сделать это сначала в предположении, что характеристика поля вычетов не делит $n$; в этом случае доказательство утверждения намного проще.

15. Пусть $\mathbf{Q}_p$ — $p$-адическое поле. Показать, что $\mathbf{Q}_p$ содержит бесконечно много квадратичных полей вида $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, где $m$ — целое положительное число.

16. Показать, что кольцо целых $p$-адических чисел $\mathbf{Z}_p$ компактно. Показать, что группа единиц в $\mathbf{Z}_p$ компактна.

17. Пусть $K$ — поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования с конечным полем вычетов и $\mathfrak{o}$ — кольцо элементов поля $K$, порядки которых $\geqslant 0$. Показать, что $\mathfrak{o}$ компактно. Показать, что группа единиц кольца $\mathfrak{o}$ замкнута в $\mathfrak{o}$ и компактна.

18. Пусть $K$ — поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования, и $\mathfrak{o}$ — кольцо целых элементов поля $K$, причем $\mathfrak{o}$ компактно. Пусть $f_1, f_2, \ldots$ — последовательность многочленов от $n$ переменных с коэффициентами в $\mathfrak{o}$. Предположим, что все эти многочлены имеют степень $\leqslant d$ и что они сходятся к многочлену $f$ (т. е. $|f - f_i| \to 0$ при $i \to \infty$). Показать, что если каждый $f_i$ имеет нуль в $\mathfrak{o}$, то $f$ также имеет нуль в $\mathfrak{o}$. Показать, что если многочлены $f_i$ однородны степени $d$ и каждый $f_i$ имеет нетривиальный нуль в $\mathfrak{o}$, то $f$ имеет нетривиальный нуль в $\mathfrak{o}$. [*Указание*: использовать компактность кольца $\mathfrak{o}$ и для однородного случая — компактность группы единиц в $\mathfrak{o}$.] (О приложениях этого упражнения, а также предложения 21 см статью Lang S., On quasi-algebraic closure, *Ann. Math.*, 1951.)

19. Показать, что если $p$, $p'$ — два различных простых числа, то поля $\mathbf{Q}_p$ и $\mathbf{Q}_{p'}$ неизоморфны.

20. Доказать, что поле $\mathbf{Q}_p$ содержит все корни $(p-1)$-й степени из единицы. [*Указание*: использовать предложение 21, применив его к многочлену $X^{p-1} - 1$, который разлагается в поле вычетов на множители степени 1.] Показать, что два различных корня $(p-1)$-й степени из единицы не могут быть сравнимы по модулю $p$.