

Матрицы и линейные отображения

На протяжении этой главы R обозначает коммутативное кольцо и E, F — R -модули. Приставку R - перед линейными отображениями и модулями мы будем опускать.

§ 1. Матрицы

Под *матрицей* размера $m \times n$ над R понимается снабженное двумя индексами семейство (a_{ij}) элементов из R ($i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$), обычно записываемое в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы будем называть a_{ij} *коэффициентами* или *компонентами матрицы*. Матрица размера $1 \times n$ называется *строкой* (размерности, или длины, n), а матрица размера $m \times 1$ — *столбцом* (размерности, или высоты, m).

Сложение для матриц одинакового размера определяется покомпонентно. Если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрицы одного и того же размера, то под $A + B$ понимается матрица, у которой ij -компонента равна $a_{ij} + b_{ij}$. Сложение, очевидно, ассоциативно. Произведение матрицы A на элемент $c \in R$ мы определяем как матрицу (ca_{ij}) , у которой ij -компонента равна ca_{ij} . Таким образом, множество матриц размера $m \times n$ над R является модулем (т. е. R -модулем).

Произведение AB двух матриц определено лишь при определенных условиях, а именно когда A имеет размер $m \times n$, а B имеет размер $n \times r$, т. е. только в том случае, когда длина строк в A такая же, как и высота столбцов в B . Пусть это имеет место, и пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$. Мы понимаем под AB матрицу размера $m \times r$, у которой ik -компонента равна

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Если для матриц A , B , C произведения AB и BC определены, то определены также произведения $(AB)C$ и $A(BC)$ и выполняется равенство

$$(AB)C = A(BC).$$

Доказывается это тривиально. Пусть $C = (c_{kl})$. Читатель тотчас обнаружит, что il -компонента каждого из предыдущих произведений равна

$$\sum_j \sum_k a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

Матрица размера $m \times n$ называется *квадратной матрицей*, если $m = n$ ¹⁾. Например, матрица размера 1×1 — квадратная матрица; она иногда будет отождествляться с элементом из R , являющимся ее единственной компонентой.

Для данного целого числа $n \geq 1$ квадратные матрицы размера $n \times n$ образуют кольцо.

Это опять-таки тривиально проверяется, и проверка предоставляется читателю.

Единичным элементом кольца матриц размера $n \times n$ является матрица

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

все компоненты которой равны 0, за исключением стоящих на диагонали, которые равны 1. Мы иногда будем писать I вместо I_n . Вообще если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица, то мы будем называть элементы a_{ii} ее *диагональными компонентами*.

Имеется естественный гомоморфизм кольца R в кольцо матриц размера $n \times n$, задаваемый правилом

$$c \mapsto cI_n.$$

Здесь cI_n — это квадратная матрица размера $n \times n$, у которой все компоненты равны 0, за исключением диагональных компонент, которые равны c . Будем обозначать кольцо матриц размера $n \times n$ над R через $\text{Mat}_n(R)$. Тогда $\text{Mat}_n(R)$ есть алгебра над R (относительно введенного выше гомоморфизма).

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$. Назовем *транспонированной* (по отношению) к ней матрицей tA матрицу (a_{ji}) ($j=1, \dots, n$ и $i=1, \dots, m$). Тогда tA — матрица размера $n \times m$.

¹⁾ Ее называют также квадратной матрицей *порядка* n . — Прим. ред.

Читатель тотчас проверит, что если A, B — матрицы одинакового размера, то

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB.$$

Если $c \in R$, то ${}^t(cA) = c{}^tA$. Если матрицы A, B можно перемножить, то произведение ${}^tB{}^tA$ определено и

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA.$$

Отметим, что операции над матрицами коммутируют с гомоморфизмами. Более точно, пусть $\varphi: R \rightarrow R'$ — гомоморфизм колец, и пусть A, B — матрицы над R . Определим φA как матрицу, получаемую применением φ ко всем компонентам A . Тогда

$$\varphi(A + B) = \varphi A + \varphi B, \quad \varphi(AB) = (\varphi A)(\varphi B),$$

$$\varphi(cA) = \varphi(c)\varphi A, \quad \varphi({}^tA) = {}^t\varphi(A)$$

Аналогичные замечания будут применимы ко всем нашим дальнейшим рассмотрениям (например, в следующем параграфе).

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица размера $n \times n$ над коммутативным кольцом R . Определим *след* A формулой

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii};$$

другими словами, след есть сумма диагональных элементов. Для любых двух матриц A, B размера $n \times n$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Действительно, если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, то

$$\text{tr}(AB) = \sum_i \sum_{\nu} a_{i\nu} b_{\nu i} = \text{tr}(BA).$$

В качестве приложения заметим, что если B — обратимая матрица размера $n \times n$ (т. е. является единицей в кольце матриц), то

$$\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(A).$$

Действительно, $\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(ABB^{-1}) = \text{tr}(A)$.

§ 2. Ранг матрицы

Пусть k — поле и A — матрица размера $m \times n$ над k . Под *строчным рангом* A мы будем понимать максимальное число линейно независимых строк матрицы A , а под *столбцовым рангом* A — максимальное число линейно независимых столбцов A . Таким образом, эти ранги представляют собой размерности векторных пространств, порожденных соответственно строками A и столбцами A . Мы утверждаем, что эти ранги равны одному и тому же числу, и это число мы назовем *рангом* A .