Глава XIII

Матрицы и линейные отображения

На протяжении этой главы R обозначает коммутативное кольцо и E, F — R-модули. Приставку R- перед линейными отображениями и модулями мы будем опускать.

§ 1. Матрицы

Под *матрицей размера* $m \times n$ над R понимается снабженное двумя индексами семейство (a_{ij}) элементов из R ($i = 1, \ldots, m$ и $j = 1, \ldots, n$), обычно записываемое в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы будем называть a_{ij} *коэффициентами* или *компонентами матрицы*. Матрица размера $1 \times n$ называется *строкой* (размерности, или длины, n), а матрица размера $m \times 1$ — *столбцом* (размерности, или высоты, m).

Сложение для матриц одинакового размера определяется покомпонентно. Если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрицы одного и того же размера, то под $A + B$ понимается матрица, у которой ij-компонента равна $a_{ij} + b_{ij}$. Сложение, очевидно, ассоциативно. Произведение матрицы A на элемент $c \in R$ мы определяем как матрицу (ca_{ij}), у которой ij-компонента равна ca_{ij}. Таким образом, множество матриц размера $m \times n$ над R является модулем (т. е. R-модулем).

Произведение AB двух матриц определено лишь при определенных условиях, а именно когда A имеет размер $m \times n$, а B имеет размер $n \times r$, т. е. только в том случае, когда длина строк в A такая же, как и высота столбцов в B. Пусть это имеет место, и пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$. Мы понимаем под AB матрицу размера $m \times r$, у которой ik-компонента равна

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Если для матриц A, B, C произведения AB и BC определены, то определены также произведения $(AB)C$ и $A(BC)$ и выполняется равенство

$$(AB)C = A(BC).$$

Доказывается это тривиально. Пусть $C = (c_{kl})$. Читатель тотчас обнаружит, что il-компонента каждого из предыдущих произведений равна

$$\sum_j \sum_k a_{ij} b_{jk} c_{kl}.$$

Матрица размера $m \times n$ называется *квадратной матрицей*, если $m = n$ [1]). Например, матрица размера 1×1 — квадратная матрица; она иногда будет отождествляться с элементом из R, являющимся ее единственной компонентой.

Для данного целого числа $n \geqslant 1$ квадратные матрицы размера $n \times n$ образуют кольцо.

Это опять-таки тривиально проверяется, и проверка предоставляется читателю.

Единичным элементом кольца матриц размера $n \times n$ является матрица

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

все компоненты которой равны 0, за исключением стоящих на диагонали, которые равны 1. Мы иногда будем писать I вместо I_n. Вообще если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица, то мы будем называть элементы a_{ii} ее *диагональными компонентами*.

Имеется естественный гомоморфизм кольца R в кольцо матриц размера $n \times n$, задаваемый правилом

$$c \longmapsto cI_n.$$

Здесь cI_n — это квадратная матрица размера $n \times n$, у которой все компоненты равны 0, за исключением диагональных компонент, которые равны c. Будем обозначать кольцо матриц размера $n \times n$ над R через $\mathrm{Mat}_n(R)$. Тогда $\mathrm{Mat}_n(R)$ есть алгебра над R (относительно введенного выше гомоморфизма).

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$. Назовем *транспонированной* (по отношению) к ней матрицей ${}^tA$ матрицу (a_{ji}) ($j = 1, \dots, n$ и $i = 1, \dots, m$). Тогда ${}^tA$ — матрица размера $n \times m$.

---

[1]) Ее называют также квадратной матрицей *порядка* n. — *Прим. ред.*

Читатель тотчас проверит, что если A, B — матрицы одинакового размера, то
$$^t(A+B) = {}^tA + {}^tB.$$
Если $c \in R$, то $^t(cA) = c\,{}^tA$. Если матрицы A, B можно перемножить, то произведение $^tB\,{}^tA$ определено и
$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

Отметим, что операции над матрицами коммутируют с гомоморфизмами. Более точно, пусть $\varphi : R \to R'$ — гомоморфизм колец, и пусть A, B — матрицы над R. Определим φA как матрицу, получаемую применением φ ко всем компонентам A. Тогда
$$\varphi(A+B) = \varphi A + \varphi B, \quad \varphi(AB) = (\varphi A)(\varphi B),$$
$$\varphi(cA) = \varphi(c)\,\varphi A, \quad \varphi({}^tA) = {}^t\varphi(A)$$

Аналогичные замечания будут применимы ко всем нашим дальнейшим рассмотрениям (например, в следующем параграфе).

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица размера $n \times n$ над коммутативным кольцом R. Определим *след* A формулой
$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii};$$
другими словами, след есть сумма диагональных элементов. *Для любых двух матриц A,B размера $n \times n$*
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$
Действительно, если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, то
$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i}\sum_{\nu} a_{i\nu} b_{\nu i} = \operatorname{tr}(BA).$$

В качестве приложения заметим, что *если B — обратимая матрица размера $n \times n$* (т. е. является единицей в кольце матриц), *то*
$$\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A).$$
Действительно, $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(ABB^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$.

§ 2. *Ранг матрицы*

Пусть k — поле и A — матрица размера $m \times n$ над k. Под *строчным рангом* A мы будем понимать максимальное число линейно независимых строк матрицы A, а под *столбцовым рангом* A — максимальное число линейно независимых столбцов A. Таким образом, эти ранги представляют собой размерности векторных пространств, порожденных соответственно строками A и столбцами A. Мы утверждаем, что эти ранги равны одному и тому же числу, и это число мы назовем *рангом* A.