Действительно, пусть $A^1, \ldots, A^n$ — столбцы A и $A_1, \ldots, A_m$ — строки A. Пусть ${}^tX = (x_1, \ldots, x_m)$ — строки с компонентами $x_i \in k$. Имеем линейное отображение

$$X \longmapsto x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$$

пространства $k^{(m)}$ на пространство, порожденное строками. Обозначим через W его ядро. Тогда W будет подпространством в $k^{(m)}$ и

$$\dim W + \text{строчный ранг} = m.$$

Пусть Y — столбец размерности m. Тогда отображение

$$(X, Y) \longmapsto {}^tXY \equiv X \cdot Y$$

является билинейным отображением в k, если матрицу ${}^tXY$ размера 1×1 рассматривать как элемент из k. Заметим, что W ортогонально пространству столбцов $A^1, \ldots, A^n$, т. е. это есть пространство всех X, для которых $X \cdot A^j = 0$ при $j = 1, \ldots, n$. В силу теоремы двойственности из гл. III мы знаем, что пространство $k^{(m)}$ дуально самому себе относительно спаривания

$$(X, Y) \longmapsto X \cdot Y$$

и что $k^{(m)}/W$ дуально пространству, порожденному столбцами $A^1, \ldots, A^n$. Следовательно,

$$\dim k^{(m)}/W = \text{столбцовый ранг},$$

или

$$\dim W + \text{столбцовый ранг} = m.$$

Отсюда заключаем, что

$$\text{столбцовый ранг} = \text{строчный ранг},$$

что и требовалось установить.

Отметим, что W можно рассматривать как пространство решений системы из n линейных уравнений

$$x_1A_1 + \ldots + x_mA_m = 0$$

с m неизвестными $x_1, \ldots, x_m$. Действительно, если мы запишем предыдущее векторное уравнение через координаты, то получим обычную систему из n линейных уравнений. Предоставляем читателю проделать это, если он пожелает.

§ 3. Матрицы и линейные отображения

Пусть E — модуль, и пусть существует базис $\mathscr{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ для E над R. Это означает, что всякий элемент из E имеет однозначное представление в виде линейной комбинации

$$x = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n,$$

где $x_i \in R$. Мы будем называть $(x_1, \ldots, x_n)$ *компонентами* x относительно этого базиса. Упорядоченный набор из n элементов можно

рассматривать как строку. Будем обозначать через X столбец, полученный транспонированием строки $(x_1, \ldots, x_n)$, называя также X *столбцом элемента x относительно заданного базиса.*

Заметим, что если $\{\xi_1', \ldots, \xi_m'\}$ — другой базис E над R, то $m = n$. Действительно, пусть $\mathfrak{p}$ — некоторый максимальный идеал в R. Тогда $E/\mathfrak{p}E$ — векторное пространство над полем $R/\mathfrak{p}R$ и непосредственно ясно, что если обозначить через $\overline{\xi}_i$ класс вычетов элемента $\xi_i \bmod \mathfrak{p}E$, то $\{\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n\}$ будет базисом для $E/\mathfrak{p}E$ над $R/\mathfrak{p}R$. Следовательно, n равно также размерности этого векторного пространства, а инвариантность мощности базисов векторных пространств над полями нам известна. Таким образом, $m = n$. Мы будем называть n *размерностью* модуля E над R.

Будем рассматривать $R^{(n)}$ как модуль столбцов высоты n. Это свободный модуль размерности n над R. Он имеет базис, состоящий из единичных векторов $e^1, \ldots, e^n$, для которых в строке

$$^t e^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

все компоненты равны 0, за исключением i-й компоненты, равной 1.

Матрица A размера $m \times n$ задает линейное отображение

$$L_A : R^{(n)} \to R^{(m)}$$

по правилу

$$X \mapsto AX.$$

Действительно, $A(X+Y) = AX + AY$ и $A(cX) = cAX$ для столбцов X, Y и $c \in R$.

Предыдущие рассмотрения могут быть распространены на несколько более общую ситуацию, которая может оказаться очень полезной. Пусть E — абелева группа, причем R — коммутативное подкольцо в

$$\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(E) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(E, E).$$

Тогда E есть R-модуль. Кроме того, если A — матрица размера $m \times n$ над R, то получаем линейное отображение

$$L_A\colon E^{(n)} \to E^{(m)},$$

определяемое по правилу, аналогичному указанному выше, а именно $X \mapsto AX$. Это интерпретируется очевидным образом как обычное умножение матриц. Если $A = (a_{ij})$ и X — столбец элементов из E, то

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

где $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.

Если A, B — матрицы над R, для которых определено произведение, то для любого $c \in R$ имеем

$$L_{AB} = L_A L_B \text{ и } L_{cA} = cL_A.$$

Таким образом,

$$A(BX) = (AB)X.$$

Произвольное коммутативное кольцо R можно рассматривать как модуль над собой. Тем самым мы снова приходим к частному случаю отображения $R^{(n)}$ в $R^{(m)}$. Кроме того, если E — модуль над R, то R можно рассматривать как кольцо эндоморфизмов E.

Предложение 1. *Пусть E — свободный модуль над R с базисом $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $y_1, \ldots, y_n$ — некоторые элементы из E и A — такая матрица над R, что*

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $\{y_1, \ldots, y_n\}$ является базисом в E в том и только в том случае, если матрица A обратима.

Доказательство. Пусть X, Y — столбцы из наших элементов, т. е. $AX = Y$. Предположим, что Y — базис. Тогда существует матрица C над R, для которой $CY = X$, так что $CAX = X$, откуда $CA = I$ и аналогично $AC = I$; следовательно, A обратима. Обратно, предположим, что A обратима. Если бы $y_1, \ldots, y_n$ были связаны соотношением

$$b_1 y_1 + \ldots + b_n y_n = 0$$

с $b_i \in R$, то, придав этому соотношению матричную форму

$$BY = 0,$$

где B — строка $(b_1, \ldots, b_n)$, и подставив вместо Y его выражение $Y = AX$, мы получили бы, что $B(AX) = (BA)X = 0$. Но $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис. Следовательно, $BA = 0$, а значит, и $B = (BA)A^{-1} = B(AA^{-1}) = 0$. Таким образом, $b_1 = \ldots = b_n = 0$ и компоненты Y линейно независимы, что доказывает наше предложение.

Отметим, что в доказательстве второй половины предложения 1 использовалось лишь существование такой матрицы C, что $CA = I$. Таким образом получаем

Следствие. *Если для матрицы A существует матрица C, такая, что $CA = I$ или $AC = I$, то матрица A обратима и $C = A^{-1}$.*

Возвратимся к нашей ситуации модулей над произвольным коммутативным кольцом R.

Пусть E, F — модули. Мы увидим, как можно линейному отображению сопоставить матрицу, если только заданы базисы в E и F. Предположим, что модули E, F — свободные с базисами $\mathscr{B} = \{\xi_1 \ldots, \xi_n\}$ и $\mathscr{B}' = \{\xi_1', \ldots, \xi_n'\}$ соответственно. Пусть

$$f\colon E \to F$$

— линейное отображение. Существуют однозначно определенные элементы $a_{ij} \in R$, такие, что

$$f(\xi_1) = a_{11}\xi_1' + \ldots + a_{m1}\xi_m',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(\xi_n) = a_{1n}\xi_1' + \ldots + a_{mn}\xi_m^1,$$

или, иначе,

$$f(\xi_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_i'.$$

(Отметим, что сумма берется по первому индексу.)
Полагаем

$$M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(f) = (a_{ij}).$$

Если элемент $x = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$ выражен через базис, то мы обозначаем столбец X компонент элемента x через $M_{\mathscr{B}}(x)$. Имеем

$$M_{\mathscr{B}'}(f(x)) = M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(f)\, M_{\mathscr{B}}(x).$$

Другими словами, если X' — столбец компонент $f(x)$ и M — матрица, ассоциированная с f, то $X' = MX$. Таким образом, действие линейного отображения выражается произведением матриц и мы имеем $f = L_M$.

Предложение 2. *Пусть E, F, D — модули и $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}''$ — конечные базисы в E, F, D соответственно. Пусть*

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} D$$

— линейные отображения. Тогда

$$M_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'}(g)\, M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(f).$$

Доказательство. Пусть A и B — матрицы, ассоциированные относительно заданных базисов с отображениями f, g соответственно. Если X — столбец, ассоциированный с $x \in E$, то столбец, ассоциированный с $g(f(x))$, равен $B(AX) = (BA)X$. Следовательно, BA есть матрица, ассоциированная с $g \circ f$. Это доказывает то, что нужно.

Следствие 1. *Пусть* $E=F$. *Тогда*

$$M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(\mathrm{id})\, M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) = M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) = I.$$

Всякая матрица $M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(\mathrm{id})$ обратима.

Доказательство. Очевидно.

Следствие 2. *Пусть* $N = M^{\mathscr{B}}(\mathrm{id})$. *Тогда*

$$M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}'}(f) = M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(\mathrm{id}) M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)\, M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) = N M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)\, N^{-1}.$$

Доказательство. Очевидно.

Следствие 3. *Пусть* E — *свободный модуль размерности* n *над* R *и* $\mathscr{B}$ — *некоторый его базис. Отображение*

$$f \longmapsto M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)$$

является изоморфизмом кольца всех эндоморфизмов модуля E *на кольцо матриц размера* $n \times n$ *над* R. *Фактически это отображение является изоморфизмом алгебр над* R.

Мы будем называть $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)$ *матрицей, ассоциированной с* f *относительно базиса* $\mathscr{B}$.

Пусть E — свободный модуль размерности n над R. Под $GL(E)$, или $\mathrm{Aut}_R(E)$ понимается группа линейных автоморфизмов модуля E. Это—группа единиц в $\mathrm{End}_R(E)$. Под $GL_n(R)$ понимают группу обратимых матриц размера $n \times n$ над R. Как только выбран базис для E над R, мы получаем изоморфизм групп

$$GL(E) \longleftrightarrow GL_n(R)$$

относительно этого базиса.

Пусть

$$f\colon E \to E$$

— некоторое линейное отображение. Выберем какой-нибудь базис $\mathscr{B}$ и рассмотрим матрицу M, ассоциированную с f относительно $\mathscr{B}$. *След* f полагаем по определению равным следу M, т. е.

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(M).$$

Если M' — матрица f относительно какого-то другого базиса, то существует обратимая матрица N, такая, что $M' = N^{-1}MN$, и, следовательно, след не зависит от выбора базиса.

§ 4. Определители

Пусть $E_1, \ldots, E_n$, F — модули. Отображение

$$f\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to F$$