

**Следствие 1.** Пусть  $E = F$ . Тогда

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}) = I.$$

*Всякая матрица  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id})$  обратима.*

**Доказательство.** Очевидно.

**Следствие 2.** Пусть  $N = M^{\mathcal{B}}(\text{id})$ . Тогда

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}) = N M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) N^{-1}.$$

**Доказательство.** Очевидно.

**Следствие 3.** Пусть  $E$  — свободный модуль размерности  $n$  над  $R$  и  $\mathcal{B}$  — некоторый его базис. Отображение

$$f \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

является изоморфизмом кольца всех эндоморфизмов модуля  $E$  на кольцо матриц размера  $n \times n$  над  $R$ . Фактически это отображение является изоморфизмом алгебр над  $R$ .

Мы будем называть  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  матрицей, ассоциированной с  $f$  относительно базиса  $\mathcal{B}$ .

Пусть  $E$  — свободный модуль размерности  $n$  над  $R$ . Под  $GL(E)$ , или  $\text{Aut}_R(E)$  понимается группа линейных автоморфизмов модуля  $E$ . Это — группа единиц в  $\text{End}_R(E)$ . Под  $GL_n(R)$  понимают группу обратимых матриц размера  $n \times n$  над  $R$ . Как только выбран базис для  $E$  над  $R$ , мы получаем изоморфизм групп

$$GL(E) \leftrightarrow GL_n(R)$$

относительно этого базиса.

Пусть

$$f: E \rightarrow E$$

— некоторое линейное отображение. Выберем какой-нибудь базис  $\mathcal{B}$  и рассмотрим матрицу  $M$ , ассоциированную с  $f$  относительно  $\mathcal{B}$ . След  $f$  полагаем по определению равным следу  $M$ , т. е.

$$\text{tr}(f) = \text{tr}(M).$$

Если  $M'$  — матрица  $f$  относительно какого-то другого базиса, то существует обратимая матрица  $N$ , такая, что  $M' = N^{-1}MN$ , и, следовательно, след не зависит от выбора базиса.

#### § 4. Определители

Пусть  $E_1, \dots, E_n, F$  — модули. Отображение

$$f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$$

называется *R-полилинейным* (или просто полилинейным), если оно линейно по каждой переменной, т. е. если для всякого индекса  $i$  и элементов  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x_j \in E_j$ , отображение

$$x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

является линейным отображением  $E_i$  в  $F$ .

Полилинейное отображение, определенное на  $n$ -кратном произведении, называется также *n-линейным*. Если  $E_1 = \dots = E_n = E$ , то мы будем говорить, что  $f$  — *полилинейное отображение на E*, вместо того, чтобы говорить, что оно полилинейно на  $E^{(n)}$ .

Пусть  $f$  — *n-линейное отображение*. Выбрав два индекса  $i, j, i \neq j$ , а потом зафиксировав все переменные, кроме  $i$ -й и  $j$ -й, мы можем рассматривать  $f$  как билинейное отображение на  $E_i \times E_j$ .

Предположим, что  $E_1 = \dots = E_n = E$ . Говорят, что полилинейное отображение  $f$  является *знакопеременным*, если  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ , всякий раз как существует такой индекс  $i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , что  $x_i = x_{i+1}$  (другими словами, когда два соседних элемента равны).

**Предложение 3.** Пусть  $f$  — *n-линейное знакопеременное отображение на E* и  $x_1, \dots, x_n \in E$ . Тогда

$$f(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots) = -f(\dots, x_{i+1}, x_i, \dots).$$

Другими словами, когда мы переставляем два соседних аргумента, значение  $f$  меняет знак. Если  $x_i = x_j$  для  $i \neq j$ , то  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

**Доказательство.** Сосредотачивая свое внимание на множителях, стоящих на  $i$ -м и  $j$ -м месте, мы можем считать, что  $f$  в нашем первом утверждении билинейно. Тогда для всех  $x, y \in E$  имеем

$$0 = f(x+y, x+y) = f(x, y) + f(y, x).$$

Этим и доказано то, что нужно, а именно что  $f(y, x) = -f(x, y)$ . Что касается второго утверждения, то мы можем последовательно переставлять соседние аргументы  $f$  до тех пор, пока имеющиеся по условию два равных аргумента не станут рядом. Это показывает, что  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ , когда  $x_i = x_j, i \neq j$ .

**Следствие.** Пусть  $f$  — *n-линейное знакопеременное отображение на E*. Пусть  $x_1, \dots, x_n \in E, i \neq j$  и  $a \in R$ . Тогда значение  $f$  на  $(x_1, \dots, x_n)$  не изменится, если мы заменим  $x_i$  на  $x_i + ax_j$ , а все другие компоненты оставим неизменными.

**Доказательство.** Очевидно.

Полилинейное знакопеременное отображение, принимающее свои значения в  $R$ , называется *полилинейной знакопеременной формой*.

Нам неоднократно придется вычислять значения полилинейного знакопеременного отображения на линейных комбинациях элементов из  $E$ .

Положим

$$w_1 = a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$w_n = a_{n1}v_1 + \dots + a_{nn}v_n.$$

Пусть  $f$  —  $n$ -линейное знакопеременное отображение на  $E$ . Разлагая правую часть равенства

$$f(w_1, \dots, w_n) = f(a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n, \dots, a_{n-1}v_1 + \dots + a_{nn}v_n),$$

мы получим сумму членов вида

$$a_{1, \sigma(1)} \dots a_{n, \sigma(n)} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}),$$

где  $\sigma$  пробегает множество произвольных отображений набора  $\{1, \dots, n\}$  в себя. Если  $\sigma$  не биективно (т. е. не является перестановкой), то два аргумента  $v_{\sigma(i)}$  и  $v_{\sigma(j)}$  совпадут при  $i \neq j$  и соответствующий член будет равен 0. Следовательно, мы можем брать нашу сумму лишь по перестановкам  $\sigma$ . Перемещая элементы  $(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$  обратно, к их стандартному порядку, и используя предложение 3, мы приходим к следующему разложению.

**Лемма.** *Пусть  $w_1, \dots, w_n$  обозначают то же, что и выше. Тогда*

$$f(w_1, \dots, w_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1, \sigma(1)} \dots a_{n, \sigma(n)} f(v_1, \dots, v_n),$$

где сумма берется по всем перестановкам с множества  $\{1, \dots, n\}$  и  $\varepsilon(\sigma)$  есть знак перестановки.

При рассмотрении определителей я буду следовать изложению Артина в его книге „Galois Theory“.

Под *определителем* размера  $n \times n$  мы будем понимать отображение

$$\det: \text{Mat}_n(R) \rightarrow R,$$

обозначаемое также через

$$D: \text{Mat}_n(R) \rightarrow R,$$

которое обладает свойством  $D(I) = 1$  и является, если рассматривать его как функцию от столбцов  $A^1, \dots, A^n$  матрицы  $A$ , полилинейным знакопеременным отображением. В этой главе для обозначения определителей мы будем использовать главным образом букву  $D$ .

Позднее мы докажем, что определители существуют. А сейчас мы выведем их свойства.

**Правило Крамера.** *Пусть  $A^1, \dots, A^n$  — столбцы размерности  $n$ , и пусть элементы  $x_1, \dots, x_n \in R$  таковы, что*

$$x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = B$$

для некоторого столбца  $B$ . Тогда для всякого  $i$  имеем

$$x_i D(A^1, \dots, A^n) = D(A^1, \dots, B, \dots, A^n),$$

где в правой части равенства  $B$  стоит на  $i$ -м месте.

**Доказательство.** Пусть, скажем,  $i=1$ . Напишем разложение

$$D(B, A^2, \dots, A^n) = \sum_{j=1}^n x_j D(A^j, A^2, \dots, A^n)$$

и применим предложение 3 (все члены в правой части равны 0, за исключением одного, содержащего  $x_1$ ).

**Следствие.** Предположим, что  $R$  — поле. Тогда  $A^1, \dots, A^n$  линейно зависимы в том и только в том случае, если  $D(A^1, \dots, A^n) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть мы имеем соотношение

$$x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = 0,$$

где  $x_i \in R$ . Тогда  $x_i D(A) = 0$  для всех  $i$ . Если некоторый коэффициент  $x_i \neq 0$ , то  $D(A) = 0$ . Обратно, предположим, что  $A^1, \dots, A^n$  линейно независимы. Тогда мы можем представить единичные векторы  $e^1, \dots, e^n$  (см. § 3) в виде линейных комбинаций

$$e^1 = b_{11} A^1 + \dots + b_{1n} A^n,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$e^n = b_{n1} A^1 + \dots + b_{nn} A^n,$$

где  $b_{ij} \in R$ . Но

$$1 = D(e^1, \dots, e^n).$$

Ввиду предыдущей леммы последнее выражение может быть разложено в сумму членов, содержащих  $D(A^1, \dots, A^n)$ , и следовательно,  $D(A)$  не может быть равно 0.

**Предложение 4.** Если определители существуют, то они определены однозначно. Если, далее,  $A^1, \dots, A^n$  — столбцы размерности  $n$  матрицы  $A = (a_{ij})$ , то

$$D(A^1, \dots, A^n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1), 1} \dots a_{\sigma(n), n},$$

где сумма берется по всем перестановкам  $\sigma$  множества  $\{1, \dots, n\}$  и  $\varepsilon(\sigma)$  — знак перестановки.

**Доказательство.** Пусть  $e^1, \dots, e^n$  — как обычно, единичные векторы. Мы можем записать

$$A^1 = a_{11} e^1 + \dots + a_{n1} e^n,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$A^n = a_{1n} e^1 + \dots + a_{nn} e^n.$$

Поэтому

$$D(A^1, \dots, A^n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1), 1} \dots a_{\sigma(n), n}$$

в силу леммы. Это доказывает, что значение определителя однозначно определено и задается указанной формулой.

**Следствие.** Пусть  $\varphi: R \rightarrow R'$  — гомоморфизм в коммутативное кольцо. Если  $A$  — квадратная матрица над  $R$  и  $\varphi A$  — матрица, полученная применением  $\varphi$  к каждой компоненте  $A$ , то

$$\varphi(D(A)) = D(\varphi A).$$

**Доказательство.** Применим  $\varphi$  к выражению из предложения 4.

**Предложение 5.** Для всякой квадратной матрицы  $A$  над  $R$

$$D(A) = D({}^t A).$$

**Доказательство.** В произведении

$$a_{\sigma(1), 1} \dots a_{\sigma(n), n}$$

каждое целое число  $k$  от 1 до  $n$  встречается среди чисел  $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$  точно один раз. Следовательно, мы можем переписать это произведение в виде

$$a_{1, \sigma^{-1}(1)} \dots a_{n, \sigma^{-1}(n)},$$

а так как  $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ , то сумма из предложения 4 запишется в виде

$$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{1, \sigma^{-1}(1)} \dots a_{n, \sigma^{-1}(n)}.$$

В этой сумме каждый член соответствует перестановке  $\sigma$ . Однако, когда  $\sigma$  пробегает все перестановки, то же самое происходит и с  $\sigma^{-1}$ . Следовательно, наша сумма равна

$$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1, \sigma(1)} \dots a_{n, \sigma(n)},$$

а это есть не что иное, как  $D({}^t A)$ , что и требовалось показать.

**Следствие.** Определитель является полилинейным и знакопеременным по отношению к строкам матрицы

Теперь мы докажем существование и одновременно одно дополнительное важное свойство определителей.

При  $n = 1$  полагаем  $D(a) = a$  для любых  $a \in R$ .

Предположим, что мы уже доказали существование определителей размера  $m \times m$  для всех целых чисел  $m < n$  ( $n \geq 2$ ). Пусть

$A$  — матрица размера  $n \times n$  над  $R$ ,  $A = (a_{ij})$ . Обозначим через  $A_{ij}$  матрицу размера  $(n-1) \times (n-1)$ , полученную из  $A$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. Пусть  $i$  — фиксированное целое число  $1 \leq i \leq n$ . Определяем индуктивно

$$D(A) = (-1)^{i+1} a_{ii} D(A_{ii}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} D(A_{in}).$$

(Это выражение известно как *разложение определителя  $D$  по  $i$ -й строке*.) Докажем, что  $D$  удовлетворяет определению определителя.

Рассмотрим  $D$  как функцию  $k$ -го столбца. Возьмем произвольный член

$$(-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}).$$

Если  $j \neq k$ , то  $a_{ij}$  не зависит от  $k$ -го столбца, а  $D(A_{ij})$  зависит от  $k$ -го столбца линейно. Если  $j = k$ , то  $a_{ij}$  зависит линейно от  $k$ -го столбца, а  $D(A_{ij})$  от  $k$ -го столбца не зависит. Так как определитель  $D(A)$  есть сумма таких членов, то он зависит от  $k$ -го столбца линейно и, таким образом,  $D(A)$  полилинеен.

Далее, предположим, что два соседних столбца равны, скажем,  $A^k = A^{k+1}$ . Пусть индекс  $j \neq k$  и  $\neq k+1$ . Тогда матрица  $A_{ij}$  имеет два соседних равных столбца и, следовательно, ее определитель равен 0. Таким образом, члены, соответствующие индексу  $j \neq k$  или  $k+1$ , дают нулевой вклад в  $D(A)$ . Остальные два члена могут быть записаны так:

$$(-1)^{i+k} a_{ik} D(A_{ik}) + (-1)^{i+k+1} a_{i,k+1} D(A_{i,k+1}).$$

Матрицы  $A_{ik}$  и  $A_{i,k+1}$  равны ввиду предположения, что  $k$ -й столбец  $A$  равен  $(k+1)$ -му столбцу. Аналогично  $a_{ik} = a_{i,k+1}$ . Следовательно, эти два члена сокращаются, поскольку они имеют противоположные знаки. Это доказывает, что наша форма — знакопеременная, и дает

*Предложение 6. Определители существуют и удовлетворяют правилу разложения по строкам и столбцам.*

[Для разложения по столбцам мы используем тот факт, что  $D(A) = D^t(A)$ .]

*Теорема 1. Пусть  $E$  — модуль над  $R$ ,  $v_1, \dots, v_n$  — элементы из  $E$  и  $A = (a_{ij})$  — матрица над  $R$ . Положим*

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Пусть, далее,  $\Delta$  — некоторое  $n$ -линейное знакопеременное отображение на  $E$ . Тогда

$$\Delta(w_1, \dots, w_n) = D(A)\Delta(v_1, \dots, v_n).$$

**Доказательство.** Разложим

$$\Delta(a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n, \dots, a_{n1}v_1 + \dots + a_{nn}v_n)$$

и, приняв во внимание, что  $D(A) = D({}^t A)$ , получим в точности то, что требовалось.

Пусть  $E, F$  — модули, и пусть  $L_a^n(E, F)$  обозначает множество всех  $n$ -линейных знакопеременных отображений  $E$  в  $F$ . Если  $F = R$ , то мы также будем писать  $L_a^n(E, R) = L_a^n(E)$ . Ясно, что  $L_a^n(E, F)$  — модуль над  $R$ , т. е. это множество замкнуто относительно сложения и умножения на элементы из  $R$ .

**Следствие 1.** Пусть  $E$  — свободный модуль над  $R$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  — некоторый его базис. Пусть, далее,  $F$  — произвольный модуль и  $w \in F$ . Тогда существует единственное  $n$ -линейное знакопеременное отображение

$$\Delta_w : E \times \dots \times E \rightarrow F,$$

такое, что  $\Delta_w(v_1, \dots, v_n) = w$ .

**Доказательство.** Не теряя общности, мы можем предполагать, что  $E = R^n$ , и если  $A^1, \dots, A^n$  — столбцы, то мы полагаем  $\Delta_w(A^1, \dots, A^n) = D(A)w$ . Тогда  $\Delta_w$ , очевидно, обладает требуемыми свойствами.

**Следствие 2.** Если модуль  $E$  свободен над  $R$  и обладает базисом, состоящим из  $n$  элементов, то модуль  $L_a^n(E)$  свободен над  $R$  и обладает базисом, состоящим из одного элемента.

**Доказательство.** Пусть  $\Delta_1$  — полилинейное знакопеременное отображение, принимающее значение 1 на базисе  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Любой элемент  $\varphi \in L_a^n(E)$  может быть записан единственным образом в виде  $c\Delta_1$  для некоторого  $c \in R$ , а именно для  $c = \varphi(v_1, \dots, v_n)$ . Это доказывает то, что нужно.

Любые два базиса для  $L_a^n(E)$  в предыдущем следствии отличаются множителем, являющимся единицей в  $R$ . Другими словами, если  $\Delta$  — базис  $L_a^n(E)$ , то  $\Delta = c\Delta_1 = \Delta_c$  для некоторого  $c \in R$ , и  $c$  должно быть единицей. Базис  $\Delta_1$  зависит, конечно, от выбора базиса для  $E$ . Когда мы рассматриваем  $R^{(n)}$ , наш определитель  $D$  есть в точности  $\Delta_1$  по отношению к стандартному базису, состоящему из единичных векторов  $e^1, \dots, e^n$ .

Иногда бывает удобно говорить, что любой базис в  $L_a^n(E)$  является *определителем* на  $E$ . В этом случае следствие из правила Крамера может быть сформулировано несколько иначе.

**Следствие 3.** Пусть  $R$  — поле,  $E$  — векторное пространство размерности  $n$  и  $\Delta$  — произвольный определитель на  $E$ . Пусть  $v_1, \dots, v_n \in E$ . Для того чтобы  $\{v_1, \dots, v_n\}$  было базисом  $E$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) \neq 0.$$

**Предложение 7.** Для любых матриц  $A, B$  размера  $n \times n$  над  $R$

$$D(AB) = D(A)D(B).$$

**Доказательство.** Это предложение является в действительности следствием теоремы 1. Возьмем в качестве  $v_1, \dots, v_n$  единичные векторы  $e^1, \dots, e^n$  и рассмотрим

$$AB \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Получим

$$D(w_1, \dots, w_n) = D(AB)D(e^1, \dots, e^n).$$

С другой стороны, пользуясь ассоциативностью и применяя теорему 1 дважды, имеем

$$D(w_1, \dots, w_n) = D(A)D(B)D(e^1, \dots, e^n).$$

Так как  $D(e^1, \dots, e^n) = 1$ , то получаем наше предложение.

Пусть  $A = (a_{ij})$  — матрица размера  $n \times n$  над  $R$ . Введем матрицу

$$\tilde{A} = (b_{ij}),$$

в которой

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} D(A_{ji}).$$

(Обратите внимание, что индексы переставлены!)

**Предложение 8.** Пусть  $d = D(A)$ . Тогда  $A\tilde{A} = \tilde{A}A = dI$ . Определитель  $D(A)$  обратим в  $R$  в том и только в том случае, если матрица  $A$  обратима, и в этом случае

$$A^{-1} = \frac{1}{d} \tilde{A}.$$

**Доказательство.** Для любой пары индексов  $i, k$   $ik$ -компоненты матрицы  $A\tilde{A}$  равна

$$\begin{aligned} & a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \\ & = a_{i1}(-1)^{k+1} D(A_{k1}) + \dots + a_{in}(-1)^{k+n} D(A_{kn}). \end{aligned}$$

Если  $i=k$ , то сумма является просто разложением определителя по  $i$ -й строке и, следовательно, равна  $d$ . Если  $i \neq k$ , то обозначим через  $\bar{A}$  матрицу, полученную из  $A$  заменой  $k$ -й строки на  $i$ -ю строку с сохранением всех остальных элементов неизменными. Если мы вычеркнем из  $\bar{A}$   $k$ -ю строку и  $j$ -й столбец, то получим ту же самую матрицу, что и вычеркивая  $k$ -ю строку и  $j$ -й столбец из матрицы  $A$ . Таким образом,

$$\bar{A}_{kj} = A_{kj}$$

и наша предыдущая сумма может быть записана в виде

$$a_{i1}(-1)^{k+1} D(\bar{A}_{k1}) + \dots + a_{in}(-1)^{k+n} D(\bar{A}_{kn}).$$

Это есть разложение определителя  $\bar{A}$  по  $i$ -й строке. Так как  $D(\bar{A})=0$ , то наша сумма равна 0. Мы таким образом доказали, что  $ik$ -компонента матрицы  $A\tilde{A}$  равна  $d$ , если  $i=k$  (т. е. если это диагональная компонента), и равна 0 в противном случае. Это доказывает, что  $A\tilde{A}=dI$ . С другой стороны, из определений мы тотчас заключаем, что  ${}^t\tilde{A}={}^t\widetilde{A}$ . Поэтому

$${}^t(\tilde{A}A) = {}^tA{}^t\tilde{A} = {}^tA\widetilde{{}^tA} = dI,$$

т. е. и  $\tilde{A}A=dI$ , поскольку  ${}^t(dI)=dI$ . Когда  $d$  — единица в  $R$ , матрица  $A$  обратима и обратной для нее служит матрица  $D^{-1}\widetilde{A}$ . Обратно, если  $A$  обратима и  $AA^{-1}=I$ , то  $d(A)D(A^{-1})=1$  и, следовательно, элемент  $D(A)$  обратим, что и требовалось показать.

**Следствие.** Пусть  $F$  — произвольный  $R$ -модуль,  $w_1, \dots, w_n$  — элементы из  $F$  и  $A=(a_{ij})$  — матрица размера  $n \times n$  над  $R$ . Предположим, что

$$a_{11}w_1 + \dots + a_{1n}w_n = 0,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_{n1}w_1 + \dots + a_{nn}w_n = 0.$$

Тогда  $D(A)w_i=0$  для всех  $i$ . В частности, если  $F$  порождается элементами  $w_1, \dots, w_n$ , то  $D(A)F=0$ .

**Доказательство.** Это вытекает из замечаний § 3. Умножая на  $\tilde{A}$ , находим

$$\tilde{A}A \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

где  $d = D(A)$ .

**Предложение 9.** Пусть  $E, F$  — свободные модули размерности  $n$  над  $R$  с базисами  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}'$  соответственно. Линейное отображение  $f: E \rightarrow F$  тогда и только тогда является изоморфизмом, когда определитель ассоциированной с ним матрицы  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$  есть единица в  $R$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$ . По определению  $f$  будет изоморфизмом в том и только в том случае, если существует линейное отображение  $g: F \rightarrow E$ , такое, что  $g \circ f = \text{id}$  и  $f \circ g = \text{id}$ . Если  $f$  — изоморфизм и  $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(g)$ , то  $AB = BA = I$ . Беря определитель произведения, заключаем, что элемент  $D(A)$  обратим в  $R$ . Обратно, если  $D(A)$  — единица, то в силу предложения 7 мы можем определить матрицу  $A^{-1}$ . Эта матрица ассоциирована с некоторым линейным отображением  $g: F \rightarrow E$ , обратным к  $f$ , что и требовалось установить.

Наконец, введем понятие определителя эндоморфизма.

Пусть  $E$  — свободный модуль над  $R$  и  $\mathcal{B}$  — его базис. Пусть  $f: E \rightarrow E$  — эндоморфизм модуля  $E$ . Положим

$$M = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f).$$

Если  $\mathcal{B}'$  — другой базис для  $E$  и  $M' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ , то существует обратимая матрица  $N$ , такая, что

$$M' = NMN^{-1}.$$

Беря определитель, мы видим, что  $D(M') = D(M)$ . Следовательно, этот определитель не зависит от выбора базиса; он будет называться *определенителем линейного отображения*  $f$ . Ниже мы дадим характеристизацию этого определителя, не зависящую от выбора базиса.

Пусть  $E$  — произвольный модуль. Мы можем рассматривать  $L_a^n(E)$  как функтор от переменной  $E$  (контравариантный). Далее, мы можем рассматривать  $L_a^n(E, F)$  как функтор от двух переменных, контравариантный по первой и ковариантный по второй переменной. Действительно, пусть

$$E' \xrightarrow{f} E$$

— линейное отображение. Всякому полилинейному отображению  $\varphi: E^{(n)} \rightarrow F$  можно сопоставить композицию  $\varphi \circ f^{(n)}$ ,

$$E' \times \dots \times E' \xrightarrow{f^{(n)}} E \times \dots \times E \xrightarrow{\varphi} F,$$

где  $f^{(n)}$  есть произведение  $f$  на себя  $n$  раз. Отображение

$$L_a^n(f): L_a^n(E, F) \rightarrow L_a^n(E', F),$$

задаваемое правилом

$$\varphi \mapsto \varphi \circ f^{(n)},$$

очевидно, линейно, и оно определяет наш функтор. Мы будем иногда писать  $f^*$  вместо  $L_a^n(f)$ .

Рассматривая, в частности, случай, когда  $E = E'$  и  $F = R$ , получим индуцированное отображение

$$f^*: L_a^n(E) \rightarrow L_a^n(E).$$

*Предложение 10.* Пусть  $E$  — свободный модуль размерности  $n$  над  $R$  и  $\Delta$  — базис в  $L_a^n(E)$ . Пусть  $f: E \rightarrow E$  — эндоморфизм модуля  $E$ . Тогда

$$f^*\Delta = D(f)\Delta.$$

*Доказательство.* Это непосредственное следствие теоремы 1. А именно пусть  $A$  (или  $'A$ ) — матрица эндоморфизма  $f$  относительно некоторого базиса  $\{v_1, \dots, v_n\}$  модуля  $E$ . По определению

$$f^*\Delta(v_1, \dots, v_n) = \Delta(f(v_1), \dots, f(v_n));$$

в силу теоремы 1 правая часть равна

$$D(A)\Delta(v_1, \dots, v_n).$$

Согласно следствию 1 теоремы 1, заключаем, что  $f^*\Delta = D(A)\Delta$ , поскольку обе эти формы принимают одинаковое значение на  $v_1, \dots, v_n$ .

### § 5. Двойственность

Пусть  $R$  — коммутативное кольцо и  $E, F$  — модули над  $R$ . Тогда  $R$ -билинейная форма на  $E \times F$  — это отображение

$$f: E \times F \rightarrow R,$$

обладающее следующими свойствами: для всякого  $x \in E$  отображение

$$y \mapsto f(x, y)$$

$R$ -линейно, и для всякого  $y \in F$  отображение

$$x \mapsto f(x, y)$$