— линейное отображение. Всякому полилинейному отображению φ: $E^{(n)} \to F$ можно сопоставить композицию $\varphi \circ f^{(n)}$,

$$E' \times \ldots \times E' \xrightarrow{f^{(n)}} E \times \ldots \times E \xrightarrow{\varphi} F,$$

где $f^{(n)}$ есть произведение f на себя n раз. Отображение

$$L_a^n(f)\colon\ L_a^n(E,\ F) \to L_a^n(E',\ F),$$

задаваемое правилом

$$\varphi \mapsto \varphi \circ f^{(n)},$$

очевидно, линейно, и оно определяет наш функтор. Мы будем иногда писать f^* вместо $L_a^n(f)$.

Рассматривая, в частности, случай, когда $E = E'$ и $F = R$, получим индуцированное отображение

$$f^*\colon\ L_a^n(E) \to L_a^n(E).$$

Предложение 10. *Пусть E — свободный модуль размерности n над R и Δ — базис в $L_a^n(E)$. Пусть f: $E \to E$ — эндоморфизм модуля E. Тогда*

$$f^*\Delta = D(f)\,\Delta.$$

Доказательство. Это непосредственное следствие теоремы 1. А именно пусть A (или ${}^tA$) — матрица эндоморфизма f относительно некоторого базиса $\{v_1, \ldots, v_n\}$ модуля E. По определению

$$f^*\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \Delta(f(v_1), \ldots, f(v_n));$$

в силу теоремы 1 правая часть равна

$$D(A)\,\Delta(v_1, \ldots, v_n).$$

Согласно следствию 1 теоремы 1, заключаем, что $f^*\Delta = D(A)\,\Delta$, поскольку обе эти формы принимают одинаковое значение на $v_1, \ldots, v_n$).

§ 5. *Двойственность*

Пусть R — коммутативное кольцо и E, F — модули над R. Тогда *R-билинейная форма* на $E \times F$ — это отображение

$$f\colon\ E \times F \to R,$$

обладающее следующими свойствами: для всякого $x \in E$ отображение

$$y \mapsto f(x,\ y)$$

R-линейно, и для всякого $y \in F$ отображение

$$x \mapsto f(x,\ y)$$

R-линейно. В остальной части этого параграфа мы будем опускать приставку R и будем писать $\langle x, y\rangle_f$ или $\langle x, y\rangle$ вместо $f(x, y)$. Для $x \in E$ и $y \in F$ пишем $x \perp y$, если $\langle x, y\rangle = 0$. Аналогично, в случае, когда S — подмножество в F, пишем $x \perp S$, если $x \perp y$ для всех $y \in S$. В этом случае мы говорим, что элемент x *перпендикулярен* к S. Пусть $S^{\perp}$ состоит из всех элементов в E, перпендикулярных к S. Это, очевидно, подмодуль в E. Аналогичным образом определяется перпендикулярность с другой стороны. Мы считаем по определению *ядром* f *слева* $F^{\perp}$ и *ядром* f *справа* $E^{\perp}$. Мы будем говорить, что форма f *невырождена слева* (*справа*), если ее ядро слева (соответственно справа) равно 0. Пусть E_0 — ядро f слева; имеем индуцированное билинейное отображение

$$E/E_0 \times F \to R,$$

которое, как тривиально вытекает из определений, невырождено слева. Аналогично, если F_0 — ядро f справа, то имеем индуцированное билинейное отображение

$$E/E_0 \times F/F_0 \to R,$$

которое невырождено с обеих сторон. Это отображение определено, поскольку значение $\langle x, y\rangle$ зависит только от смежного класса x по модулю E_0 и смежного класса y по модулю F_0.

Мы будем обозначать через $L^2(E, F; R)$ множество всех билинейных отображений $E \times F$ в R. Ясно, что это множество является модулем (т. е. R-модулем) с обычными сложением отображений и умножением отображений на элементы из R.

Форма f порождает гомоморфизм

$$\varphi_f\colon E \to \operatorname{Hom}_R(F, R),$$

такой, что

$$\varphi_f(x)(y) = f(x, y) = \langle x, y\rangle$$

для всех $x \in E$ и $y \in F$. Мы будем называть $\operatorname{Hom}_R(F, R)$ *дуальным модулем* модуля F и обозначать его через F^*. Имеем изоморфизм

$$\boxed{L^2(E, F; R) \leftrightarrow \operatorname{Hom}_R(E, \operatorname{Hom}_R(F, R))},$$

задаваемый отображением $f \mapsto \varphi_f$, обратное к которому определяется очевидным образом: если $\varphi\colon E \to \operatorname{Hom}_R(F, R)$ — гомоморфизм, то определяем f по формуле

$$f(x, y) = \varphi(x)(y).$$

Мы будем называть форму f *неособой слева*, если φ_f — изоморфизм, другими словами, если наша форма может быть использована для отождествления E с модулем, дуальным к F. Форма, *неособая справа*, определяется аналогичным образом, и мы будем говорить, что форма f *неособая*, если она неособая слева и справа.

Предостережение: невырожденная форма не обязательно должна быть неособой.

Получим теперь изоморфизм

$$\boxed{\operatorname{End}_R(E) \longleftrightarrow L^2(E,\ F;\ R)},$$

зависящий от фиксированного неособого билинейного отображения f: $E \times F \to R$.

Пусть $A \in \operatorname{End}_R(E)$ — линейное отображение E в себя. Тогда отображение

$$(x,\ y) \longmapsto \langle Ax,\ y\rangle = \langle Ax,\ y\rangle_f$$

билинейно, и этим путем всякому $A \in \operatorname{End}_R(E)$ мы сопоставляем линейным образом некоторую билинейную форму из $L^2(E,\ F;\ R)$.

Обратно, пусть отображение h: $E \times F \to R$ билинейно. При заданном $x \in E$ отображение h_x: $F \to R$, для которого $h_x(y) = h(x,\ y)$, линейно и лежит в дуальном модуле F^*. По предположению существует единственный элемент $x' \in E$, такой, что для всех $y \in F$

$$h(x,\ y) = \langle x',\ y\rangle.$$

Очевидно, что сопоставление $x \longmapsto x'$ является линейным отображением E в себя. Таким образом, всякому билинейному отображению $E \times F \to R$ мы сопоставили линейное отображение $E \to E$.

Непосредственно видно, что отображения, описанные в последних двух абзацах, являются взаимно обратными изоморфизмами между $\operatorname{End}_R(E)$ и $L^2(E,\ F;\ R)$. Подчеркнем еще раз, что они зависят от нашей формы f.

Разумеется, мы могли бы все то же самое проделать справа и получить аналогичный *изоморфизм*

$$\boxed{L^2(E,\ F;\ R) \longleftrightarrow \operatorname{End}_R(F)},$$

также зависящий от нашей фиксированной неособой формы f.

В качестве приложения рассмотрим линейное отображение A: $E \to E$. Пусть $(x,\ y) \longmapsto \langle Ax,\ y\rangle$ — соответствующее ему билинейное отображение. Тогда существует однозначно определенное линейное отображение

$${}^tA\colon\ F \to F,$$

такое, что

$$\langle Ax,\ y\rangle = \langle x,\ {}^tAy\rangle$$

для всех $x \in E$ и $y \in F$. Мы будем называть ${}^tA$ отображением, *сопряженным к A относительно* f[1].

Непосредственно ясно, что если A, B — линейные отображения E в себя, то для $c \in R$ имеем

$$^t(cA) = c\,{}^tA,\quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad \text{и} \quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

Предположим, что $E = F$. Пусть отображение $f\colon E \times E \to R$ билинейно. Под *автоморфизмом пары* (E, f) или просто под автоморфизмом формы f мы будем понимать линейный автоморфизм $A\colon E \to E$, такой, что

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$$

для всех $x, y \in E$. Группа автоморфизмов формы f обозначается через $\mathrm{Aut}(f)$.

Предложение 11. *Пусть $f\colon E \times E \to R$ — неособая билинейная форма, $A\colon E \to E$ — линейное отображение. Тогда A* является автоморфизмом f в том и только в том случае, если ${}^tAA = \mathrm{id}$ и A обратимо.

Доказательство. Из равенства

$$\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, {}^tAAy\rangle,$$

выполняющегося для всех $x, y \in E$, заключаем, что ${}^tAA = \mathrm{id}$, если A — автоморфизм формы f. Обратное столь же очевидно.

Замечание. Если модуль E свободен и конечномерен, то условие ${}^tAA = \mathrm{id}$ влечет обратимость A.

Пусть $f\colon E \times E \to R$ — билинейная форма. Мы будем говорить, что f — *симметрическая*, если $f(x, y) = f(y, x)$ для всех $x, y \in E$. Множество симметрических билинейных форм на E будет обозначаться символом $L_s^2(E)$. Возьмем фиксированную симметрическую неособую билинейную форму f на E, записав ее в виде $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$. Эндоморфизм $A\colon E \to E$ называется *симметрическим относительно* f, если ${}^tA = A$. Ясно, что множество симметрических эндоморфизмов модуля E является модулем, который мы будем обозначать через $\mathrm{Sym}(E)$. Имеем *изоморфизм, зависящий от нашей фиксированной симметрической неособой формы* f,

$$\boxed{L_s^2(E) \longleftrightarrow \mathrm{Sym}(E)}\,.$$

---

[1] Точнее, сопряженным к A слева. Об этом достаточно выразительно свидетельствует обозначение ${}^tA$. В английском тексте для ${}^tA$ использовано название transpose в отличие от adjoint в эрмитовом случае. При переводе было сохранено лишь различие в обозначениях: ${}^tA$ и A^*. — *Прим. ред.*

Этот изоморфизм описывается следующим образом. Если g — симметрическая билинейная форма на E, то существует однозначно определенное линейное отображение A, такое, что

$$g(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

для всех $x, y \in E$. Используя тот факт, что обе формы f, g симметрические, получаем

$$\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle = \langle y, {}^tAx \rangle = \langle {}^tAx, y \rangle.$$

Следовательно, $A = {}^tA$. Сопоставление $g \mapsto A$ дает гомоморфизм $L_s^2(E)$ в $\mathrm{Sym}(E)$. Обратно, для заданного симметрического эндоморфизма A модуля E мы можем определить симметрическую форму правилом $(x, y) \mapsto \langle Ax, y \rangle$, и сопоставление этой формы эндоморфизму A, очевидно, дает гомоморфизм $\mathrm{Sym}(E)$ в $L_s^2(E)$, обратный к предыдущему гомоморфизму. Следовательно, $\mathrm{Sym}(E)$ и $L_s^2(E)$ изоморфны.

Напомним, что билинейная форма $g: E \times E \to R$ называется знакопеременной, если $g(x, x) = 0$ для всех $x \in E$ и, следовательно, $g(x, y) = -g(y, x)$ для всех $x, y \in E$. Множество билинейных знакопеременных форм на E является модулем, обозначаемым символом $L_a^2(E)$.

Пусть $f: (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ — фиксированная *симметрическая* неособая билинейная форма на E. Эндоморфизм $A: E \to E$ будет называться *кососимметрическим* или *знакопеременным* относительно f, если ${}^tA = -A$ и, кроме того, $\langle Ax, x \rangle = 0$ для всех $x \in E$. Если для всякого $a \in R$ соотношение $2a = 0$ возможно лишь при $a = 0$, то второе условие $\langle Ax, x \rangle = 0$ излишне, так как $\langle Ax, x \rangle = -\langle Ax, x \rangle$ влечет $\langle Ax, x \rangle = 0$. Ясно, что множество знакопеременных эндоморфизмов модуля E образует модуль, обозначаемый через $\mathrm{Alt}(E)$. *Имеет место изоморфизм, зависящий от нашей фиксированной симметрической неособой формы f,*

$$\boxed{L_a^2(E) \leftrightarrow \mathrm{Alt}(E)}.$$

Этот изоморфизм описывается следующим образом. Если g — знакопеременная билинейная форма на E, то соответствующее ей линейное отображение A — это такое отображение, для которого

$$g(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

при всех $x, y \in E$. Аналогично симметрическому случаю тривиально проверяется, что соответствие $g \leftrightarrow A$ дает нам искомый изоморфизм.

Примеры. Пусть k — поле, E — конечномерное векторное пространство над k и $f: E \times E \to E$ — билинейное отображение, записываемое в виде $(x, y) \longmapsto xy$. Каждому $x \in E$ сопоставим линейное отображение λ_x: $E \to E$, для которого

$$\lambda_x(y) = xy.$$

Тогда отображение, получаемое взятием следа, а именно

$$(x, y) \longmapsto \operatorname{tr}(\lambda_{xy}),$$

есть билинейная форма на E. Если $xy = yx$, то эта билинейная форма симметрическая.

Далее, пусть E — пространство непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, $K(s, t)$ — непрерывная функция от двух вещественных переменных, определенная на квадрате $0 \leqslant s \leqslant 1$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Для $\varphi, \psi \in E$ положим

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \int \varphi(s) K(s, t) \psi(t)\, ds\, dt,$$

где двойной интеграл берется по квадрату. Получаем билинейную форму на E. Если $K(s, t) = K(t, s)$, то эта билинейная форма симметрическая. Когда мы в следующем параграфе будем рассматривать матрицы и билинейные формы, читатель увидит аналогию между предыдущей формулой и билинейной формой, определяемой матрицей.

Наконец, пусть U — открытое подмножество вещественного банахова пространства E (или конечномерного евклидова пространства, если читатель на этом настаивает), и пусть f: $U \to \mathbf{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемое отображение. Для всякого $x \in U$ производная $Df(x)$: $E \to \mathbf{R}$ есть непрерывное линейное отображение, а вторая производная $D^2 f(x)$ может рассматриваться как непрерывное симметрическое билинейное отображение $E \times E$ в $\mathbf{R}$.

§ 6. *Матрицы и билинейные формы*

Мы исследуем связь между понятиями, введенными выше, и матрицами. Пусть $f: E \times F \to R$ — билинейное отображение, где E, F — свободные модули над R с базисами $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $\mathscr{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ соответственно. Положим $g_{ij} = \langle v_i, w_j \rangle$. Если

$$x = x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m$$

и

$$y = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n$$

— элементы из E и F соответственно с координатами x_i, $y_j \in R$, то

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j.$$