ваемое в виде $(x, y) \longmapsto xy$. Каждому $x \in E$ сопоставим линейное отображение λ_x: $E \to E$, для которого

$$\lambda_x(y) = xy.$$

Тогда отображение, получаемое взятием следа, а именно

$$(x, y) \longmapsto \operatorname{tr}(\lambda_{xy}),$$

есть билинейная форма на E. Если $xy = yx$, то эта билинейная форма симметрическая.

Далее, пусть E — пространство непрерывных функций на отрезке $[0,1]$, $K(s, t)$ — непрерывная функция от двух вещественных переменных, определенная на квадрате $0 \leqslant s \leqslant 1$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Для $\varphi, \psi \in E$ положим

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\int \varphi(s) K(s, t) \psi(t)\, ds\, dt,$$

где двойной интеграл берется по квадрату. Получаем билинейную форму на E. Если $K(s, t) = K(t, s)$, то эта билинейная форма симметрическая. Когда мы в следующем параграфе будем рассматривать матрицы и билинейные формы, читатель увидит аналогию между предыдущей формулой и билинейной формой, определяемой матрицей.

Наконец, пусть U — открытое подмножество вещественного банахова пространства E (или конечномерного евклидова пространства, если читатель на этом настаивает), и пусть f: $U \to \mathbf{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемое отображение. Для всякого $x \in U$ производная $Df(x)$: $E \to \mathbf{R}$ есть непрерывное линейное отображение, а вторая производная $D^2 f(x)$ может рассматриваться как непрерывное симметрическое билинейное отображение $E \times E$ в $\mathbf{R}$.

§ 6. Матрицы и билинейные формы

Мы исследуем связь между понятиями, введенными выше, и матрицами. Пусть $f: E \times F \to R$ — билинейное отображение, где E, F — свободные модули над R с базисами $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $\mathscr{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ соответственно. Положим $g_{ij} = \langle v_i, w_j \rangle$. Если

$$x = x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m$$

и

$$y = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n$$

— элементы из E и F соответственно с координатами x_i, $y_j \in R$, то

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j.$$

Пусть X, Y — столбцы координат для x и y относительно наших базисов. Тогда

$$\langle x, y\rangle = {}^tXGY,$$

где G — матрица (g_{ij}). Мы могли бы записать $G = M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(f)$. Будем называть G *матрицей, ассоциированной с формой f относительно базисов $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$.*

Обратно, если дана матрица G (размера $m \times n$), то из отображения

$$(X, Y) \longmapsto {}^tXGY$$

мы получаем билинейную форму. Таким образом, мы приходим к соответствию между билинейными формами и матрицами и ясно, что это соответствие индуцирует изоморфизм (R-модулей)

$$\boxed{L^2(E, F; R) \longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)},$$

задаваемый правилом

$$f \longmapsto M_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(f).$$

Два отображения между этими двумя модулями, описанные нами выше, очевидно, обратны друг другу.

Если базисы $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и $\mathscr{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ таковы, что $\langle v_i, w_j\rangle = \delta_{ij}$, то будем говорить, что эти базисы *дуальны* друг другу. В этом случае билинейное отображение имеет на (X, Y) значение

$$X \cdot Y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

задаваемое обычным скалярным произведением.

Легко найти общее правило, по которому изменяется матрица G, когда мы меняем базисы в E и F. Однако мы выпишем явную формулу только в том случае, когда $E = F$ и $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$. Итак, имеем билинейную форму $f: E \times E \to R$. Пусть $\mathscr{C}$ — другой базис в E. Будем писать $X_{\mathscr{B}}$ и $X_{\mathscr{C}}$ для столбцов, соответствующих элементу x из E относительно этих двух базисов. Обозначим через C обратимую матрицу $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(\mathrm{id})$, для которой

$$X_{\mathscr{B}} = CX_{\mathscr{C}}.$$

Тогда наша форма задается формулой

$$\langle x, y\rangle = {}^tX_{\mathscr{C}}{}^tCGCY_{\mathscr{C}}.$$

Мы видим, что

$$M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}(f) = {}^tCM_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)C. \tag{1}$$

Другими словами, матрица билинейной формы преобразуется при помощи матрицы C перехода от одного базиса к другому и транспонированной к ней матрицы ${}^tC$.

Если F — свободный модуль над R с базисом $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, то $\mathrm{Hom}_R(F, R)$ — также свободный модуль и имеется дуальный базис $\{\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*\}$

$$\eta_i^*(\eta_j) = \delta_{ij}.$$

Это проверяется точно так же, как для векторных пространств над полями.

Предложение 12. *Пусть E, F — свободные модули размерности n над R и $f: E \times F \to R$ — некоторая билинейная форма. Следующие условия эквивалентны:*

Форма f — неособая слева.

Форма f — неособая справа.

Форма f — неособая.

Определитель матрицы f относительно любых базисов обратим в R.

Доказательство. Предположим, что f — неособая слева. Фиксируем некоторый базис в E, относительно которого будем записывать элементы из E в виде столбцов и рассмотрим матрицу G для f. Тогда наша форма будет задаваться отображением

$$(X, Y) \longmapsto {}^tXGY,$$

где X, Y — столбцы с коэффициентами в R. По предположению отображение

$$X \longmapsto {}^tXG$$

задает изоморфизм между модулем столбцов и модулем строк длины n над R. Следовательно, матрица G обратима, так что ее определитель есть единица в R. Обратное столь же очевидно, и мы видим, что если $\det(G)$ есть единица, то отображение

$$Y \longmapsto GY$$

должно быть изоморфизмом модуля столбцов на себя. Это доказывает наше утверждение.

Исследуем теперь, как ведет себя в терминах матриц отображение, сопряженное к данному. Пусть E, F — свободные модули над R размерности n.

Пусть $f: E \times F \longmapsto R$ — неособая билинейная форма, и предположим, что заданы базисы $\mathscr{B}$ в E и $\mathscr{B}'$ в F. Пусть G — матрица f относительно этих базисов и $A: E \to E$ — линейное отображение с матрицей M относительно $\mathscr{B}$. Если $x \in E$, $y \in F$ и X, Y — их столбцы относительно $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$, то

$$\langle Ax, y\rangle = {}^t(MX)GY = {}^tX{}^tMGY.$$

Пусть N — матрица отображения ${}^tA$ относительно базиса $\mathscr{B}'$. Тогда NY есть столбец элемента ${}^tAy$ относительно $\mathscr{B}'$. Следовательно,

$$\langle x, {}^tAy\rangle = {}^tXGNY.$$

Отсюда заключаем, что ${}^tMG = GN$, и так как матрица G обратима, то мы можем выразить N через M. Получаем

Предложение 13. *Пусть E, F — свободные модули размерности n над R, $f: E \times E \to R$ — неособая билинейная форма, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ — базисы над R в E и F соответственно и G — матрица f относительно этих базисов.* Пусть $A: E \to E$ — *линейное отображение и M — его матрица относительно $\mathscr{B}$. Тогда матрицей относительно $\mathscr{B}'$ сопряженного к A отображения ${}^tA$ будет*

$$(G^{-1})^t MG.$$

Следствие 1. *Если G — единичная матрица, то матрица сопряженного отображения ${}^tA$ получается из матрицы отображения A переходом к транспонированной матрице.*

В терминах матриц и базисов мы получаем следующую характеризацию того факта, что матрица индуцирует автоморфизм формы:

Следствие 2. *Сохраняя обозначения предложения* 13, *положим $E = F$ и $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$. Матрица M размера $n \times n$ тогда и только тогда является матрицей автоморфизма формы f (относительно нашего базиса), когда*

$${}^tMGM = G.$$

В частности, если это условие удовлетворяется, то матрица M обратима.

Доказательство. Используем определения и формулу, доказанную в предложении 13. Отметим, что M обратима хотя бы потому, что ее определитель есть единица в R.

Матрица M над R называется *симметрической* (соответственно *кососимметрической* [1])), если ${}^tM = M$ (соответственно если ${}^tM = -M$ и диагональные элементы в M равны 0).

Предложение 14. *Пусть E — свободный модуль размерности n над R и $\mathscr{B}$ — фиксированный базис. Отображение*

$$f \to M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)$$

индуцирует изоморфизм между модулем симметрических билинейных форм на $E \times E$ (соответственно модулем знакоперемен-

---

[1]) В тексте — *знакопеременной* что, понятно, одно и то же, когда 2 не является делителем нуля в R. — *Прим. ред.*

ных форм на $E \times E$) и модулем симметрических матриц размера $n \times n$ над R (соответственно модулем кососимметрических матриц размера $n \times n$ над R).

Доказательство. Рассмотрим сначала симметрический случай. Предположим, что форма f симметрическая. Пусть в терминах координат $G = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Наша форма задается произведением ${}^tXGY$, которое должно быть равно ${}^tYGX$ в силу симметричности. Однако ${}^tXGY$ можно рассматривать как матрицу размера 1×1, совпадающую со своей транспонированной матрицей, а именно с ${}^tY{}^tGX$. Таким образом,

$$ {}^tYGX = {}^tY{}^tGX $$

для всех векторов X, Y. Отсюда следует, что $G = {}^tG$. Обратно, очевидно, что любая симметрическая матрица определяет симметрическую форму.

Что касается знакопеременных форм, то, заменяя x на $x+y$ в соотношении $\langle x, x\rangle = 0$, получим

$$ \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = 0. $$

В терминах координатных векторов X, Y и матрицы G это дает

$$ {}^tXGY + {}^tYGX = 0. $$

Перейдя, скажем, от второй из матриц размера 1×1, входящих в это соотношение, к транспонированной, получим (для всех X, Y)

$$ {}^tXGY + {}^tX{}^tGY = 0. $$

Следовательно, $G + {}^tG = 0$. Кроме того, беря в качестве X любой из единичных векторов

$$ {}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) $$

и используя соотношение ${}^tXGX = 0$, находим, что диагональные элементы в G должны быть равны 0. Обратно, если матрица G размера $n \times n$ такова, что ${}^tG + G = 0$ и $g_{ii} = 0$ для $i = 1, \ldots, n$, то непосредственно проверяется, что отображение

$$ (X, Y) \mapsto {}^tXGY $$

определяет знакопеременную форму. Это доказывает наше предложение.

Разумеется, если, как это обычно бывает, элемент 2 не является делителем нуля в R, то из условия ${}^tM = -M$ следует, что диагональные элементы в M должны быть равны 0. Таким образом, в этом случае прямо из $G + {}^tG = 0$ вытекает, что форма знакопеременная.