

Глава XIV

Структура билинейных форм

§ 1. Предварительные сведения, ортогональные суммы

Цель этой главы — проникнуть несколько глубже в структурную теорию наших трех типов форм. При этом мы будем большей частью предполагать, что основное кольцо является полем и даже полем характеристики $\neq 2$ в симметрическом случае.

Напомним наши три определения. Пусть E — модуль над коммутативным кольцом R , $g: E \times E \rightarrow R$ — некоторое отображение. Билинейное отображение g мы называем *симметрической* формой, если $g(x, y) = g(y, x)$ для всех $x, y \in E$. Мы называем форму g *знакоизменной*, если $g(x, x) = 0$ и, следовательно, $g(x, y) = -g(y, x)$ для всех $x, y \in E$. В том случае, когда R имеет автоморфизм $a \mapsto \bar{a}$ порядка 2, мы говорим, что g — *эрмитова* форма, если отображение g линейно по своему первому аргументу, антилинейно по второму и

$$g(x, y) = \overline{g(y, x)}.$$

Мы будем писать $g(x, y) = \langle x, y \rangle$, если ясно, о какой форме g идет речь. Мы также иногда будем писать $g(x, y) = x \cdot y$ или $g(x, x) = x^2$, называя g *скалярным произведением*.

Если $v_1, \dots, v_m \in E$, то будем обозначать через (v_1, \dots, v_m) подмодуль в E , порожденный элементами v_1, \dots, v_m .

Пусть форма g симметрическая, знакопеременная или эрмитова. Тогда ясно, что левое ядро g равно ее правому ядру; оно будет называться просто *ядром* g .

В любом из этих случаев мы будем говорить, что форма g *невырожденная*, если ее ядро равно 0. Предположим, что E конечно-мерно над некоторым полем k . Тогда форма невырождена в том и только в том случае, если она неособая, т. е. индуцирует изоморфизм E с его дуальным пространством (антидуальным в случае эрмитовых форм).

За исключением нескольких замечаний об антилинейности из предыдущей главы, в этой главе мы не будем использовать результатов о двойственности. Нам потребуется только двойственность над полями, рассмотренная в гл. III. Кроме того, нам по существу не при-

дется здесь встречаться с матрицами, за исключением замечаний о пфаффиане в § 10.

Введем еще одно обозначение. При изучении форм на векторных пространствах мы будем часто разлагать векторное пространство в прямые суммы ортогональных подпространств. Если E — векторное пространство с формой g и F, F' — его подпространства, то мы будем писать

$$E = F \perp F'$$

для обозначения того факта, что E есть прямая сумма F и F' и что F ортогонально (или перпендикулярно) F' , т. е., другими словами, $x \perp y$ (или $\langle x, y \rangle = 0$) для всех $x \in F$ и $y \in F'$. Мы в этом случае будем говорить, что E является *ортогональной суммой* F и F' . Это не будет приводить к путанице с использованием символа \perp в тех случаях, когда мы пишем $F \perp F'$ лишь для обозначения того, что F перпендикулярно F' . Из контекста всегда будет ясно, что мы имеем в виду.

Большая часть этой главы посвящена получению определенных ортогональных разложений векторного пространства с одним из наших трех типов форм, таких, что каждое слагаемое в сумме имеет некоторый легко распознаваемый тип.

В симметрическом и эрмитовом случаях особенно интересны прямые разложения, слагаемые в которых одномерны. Так, в случае симметрической или эрмитовой формы \langle , \rangle мы говорим, что $\{v_1, \dots, v_n\}$ — *ортогональный базис* (относительно этой формы), если $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ для всех $i \neq j$. Очевидно, что всякий ортогональный базис дает такое разложение. Если форма невырожденная и если $\{v_1, \dots, v_n\}$ — ортогональный базис, то непосредственно видно, что $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$ ни для какого i .

Предложение 1. Пусть E — векторное пространство над полем k и g — форма одного из трех указанных выше типов. Предположим, что E представляется в виде ортогональной суммы

$$E = E_1 \perp \dots \perp E_m.$$

Тогда g невырождена на E в том и только в том случае, если она невырождена на каждом E_i . Если E_i^0 — ядро ограничения g на E_i , то ядром g на E будет ортогональная сумма

$$E^0 = E_1^0 \perp \dots \perp E_m^0.$$

Доказательство. Элементы v, w из E однозначно записываются в виде

$$v = \sum_{i=1}^m v_i, \quad w = \sum_{i=1}^m w_i,$$

где $v_i, w_i \in E_i$. Тогда

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^m v_i \cdot w_i$$

и $v \cdot w = 0$ для всех $w \in E$ в том и только в том случае, если $v_i \cdot w_i = 0$ для всякого $i = 1, \dots, m$. Теперь наше утверждение очевидно.

Заметим, что если E_1, \dots, E_m — векторные пространства над k и g_1, \dots, g_m — формы на этих пространствах, то мы можем определить форму $g = g_1 \oplus \dots \oplus g_m$ на прямой сумме $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_m$; а именно, если v, w записаны как выше, то подаем

$$g(v, w) = \sum_{i=1}^m g_i(v_i, w_i).$$

Ясно, что при этом фактически $E = E_1 \perp \dots \perp E_m$. Мы могли бы также писать $g = g_1 \perp \dots \perp g_m$.

Предложение 2. Пусть E — конечномерное пространство над полем k и g — форма на E одного из упомянутых выше типов. Предположим, что g невырождена. Пусть F — подпространство в E . Форма g тогда и только тогда невырождена на F , когда $F + F^\perp = E$, причем невырожденность на F эквивалентна невырожденности на F^\perp .

Доказательство. Имеем (как тривиальное следствие из гл. III, § 5)

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E = \dim(F + F^\perp) + \dim(F \cap F^\perp).$$

Следовательно, $F + F^\perp = E$ тогда и только тогда, когда $\dim(F \cap F^\perp) = 0$. Отсюда тотчас вытекает наше первое утверждение. Так как F, F^\perp входят в размерностное условие симметрично, то отсюда вытекает также наше второе утверждение.

Вместо того чтобы говорить, что форма невырождена на E , мы будем иногда, допуская вольность, говорить, что само E невырождено.

Пусть E — конечномерное пространство над полем k , g — форма одного из упомянутых выше типов и E_0 — ядро этой формы. Мы получаем индуцированную форму того же самого типа

$$g_0: E/E_0 \times E/E_0 \rightarrow k,$$

поскольку $g(x, y)$ зависит только от смежного класса x и смежного класса y по модулю E_0 . При этом g_0 — невырожденная, так как ее ядро с обеих сторон равно 0.

Пусть E, E' — конечномерные векторные пространства с формами g, g' соответственно. Линейное отображение $\sigma: E \rightarrow E'$ называется *метрическим*, если

$$g'(\sigma x, \sigma y) = g(x, y)$$

или, в других обозначениях, $\sigma x \cdot \sigma y = x \cdot y$ для всех $x, y \in E$. Если отображение σ — линейный метрический изоморфизм, то мы будем говорить, что σ — *изометрия*. Формы g', g при этом называются *изометричными* (или *эквивалентными*).

Пусть E, E_0 обозначают то же, что и выше. Тогда мы имеем индуцированную форму на факторпространстве E/E_0 . Если W — дополнительное подпространство к E_0 , т. е. $E = E_0 \oplus W$, то каноническое отображение $\sigma: E \rightarrow E/E_0$ — метрическое и индуцирует изометрию W на E/E_0 . Это утверждение очевидно. Оно показывает, что если $E = E_0 \oplus W'$ — другое разложение E в прямую сумму, то W' изометрично W . Мы знаем, что пространство $W \approx E/E_0$ невырождено. Следовательно, наша форма определяет однозначно с точностью до изометрии невырожденную форму на подпространстве, дополнительном к ядру.

§ 2. Квадратичные отображения

Пусть R — коммутативное кольцо и E, F — R -модули. Как обычно, будем опускать приставку R . Напомним, что билинейное отображение $f: E \times E \rightarrow F$ называется симметрическим, если $f(x, y) = f(y, x)$ для всех $x, y \in E$.

Будем говорить, что F не имеет 2-кручения, если для всякого $y \in F$, такого, что $2y = 0$, мы имеем $y = 0$. (Это выполняется, если элемент 2 обратим в R .)

Пусть $f: E \rightarrow F$ — некоторое отображение. Мы будем говорить, что f квадратично (т. е. R -квадратично), если существуют симметрическое билинейное отображение $g: E \times E \rightarrow F$ и линейное отображение $h: E \rightarrow F$, такие, что для всех $x \in E$ имеем

$$f(x) = g(x, x) + h(x).$$

Предложение 3. Предположим, что F не имеет 2-кручения. Пусть $f: E \rightarrow F$ — квадратичное отображение, выраженное, как выше, через симметрическое билинейное отображение g и линейное отображение h . Тогда g, h однозначно определяются отображением f . Для всех $x, y \in E$ имеем

$$2g(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y).$$

Доказательство. Если мы вычислим $f(x + y) - f(x) - f(y)$, то получим $2g(x, y)$. Если g_1 — симметрическое билинейное отобра-