Пусть E, E' — конечномерные векторные пространства с формами g, g' соответственно. Линейное отображение σ: $E \to E'$ называется *метрическим*, если

$$g'(\sigma x, \sigma y) = g(x, y)$$

или, в других обозначениях, $\sigma x \cdot \sigma y = x \cdot y$ для всех $x, y \in E$. Если отображение σ — линейный метрический изоморфизм, то мы будем говорить, что σ — *изометрия*. Формы g', g при этом называются *изометричными* (или *эквивалентными*).

Пусть E, E_0 обозначают то же, что и выше. Тогда мы имеем индуцированную форму на факторпространстве E/E_0. Если W — дополнительное подпространство к E_0, т. е. $E = E_0 \oplus W$, то каноническое отображение σ: $E \to E/E_0$ — метрическое и индуцирует изометрию W на E/E_0. Это утверждение очевидно. Оно показывает, что если $E = E_0 \oplus W'$ — другое разложение E в прямую сумму, то W' изометрично W. Мы знаем, что пространство $W \approx E/E_0$ невырождено. Следовательно, наша форма определяет однозначно с точностью до изометрии невырожденную форму на подпространстве, дополнительном к ядру.

§ 2. Квадратичные отображения

Пусть R — коммутативное кольцо и E, F — R-модули. Как обычно, будем опускать приставку R. Напомним, что билинейное отображение f: $E \times E \to F$ называется симметрическим, если $f(x, y) = f(y, x)$ для всех $x, y \in E$.

Будем говорить, что F *не имеет 2-кручения*, если для всякого $y \in F$, такого, что $2y = 0$, мы имеем $y = 0$. (Это выполняется, если элемент 2 обратим в R.)

Пусть f: $E \to F$ — некоторое отображение. Мы будем говорить, что f *квадратично* (т. е. R-квадратично), если существуют симметрическое билинейное отображение g: $E \times E \to F$ и линейное отображение h: $E \to F$, такие, что для всех $x \in E$ имеем

$$f(x) = g(x, x) + h(x).$$

Предложение 3. *Предположим, что F не имеет 2-кручения. Пусть f: $E \to F$ — квадратичное отображение, выраженное, как выше, через симметрическое билинейное отображение g и линейное отображение h. Тогда g, h однозначно определяются отображением f. Для всех $x, y \in E$ имеем*

$$2g(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y).$$

Доказательство. Если мы вычислим $f(x + y) - f(x) - f(y)$, то получим $2g(x, y)$. Если g_1 — симметрическое билинейное отобра-

жение, h_1 — линейное отображение и $f(x) = g_1(x, x) + h_1(x)$, то $2g(x, y) = 2g_1(x, y)$. Так как по предположению F не имеет 2-кручения, то отсюда вытекает, что $g(x, y) = g_1(x, y)$ для всех $x, y \in E$ и, следовательно, g однозначно определено. Но тогда h определяется из соотношения

$$h(x) = f(x) - g(x, x).$$

Мы будем называть g, h билинейным и линейным отображениями, *ассоциированными* с f.

Для отображения $f\colon E \to F$ определим

$$\Delta f\colon E \times E \to F,$$

положив

$$\Delta f(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y).$$

Мы будем говорить, что f — *однородное квадратичное* отображение, если оно квадратичное и если ассоциированное с ним линейное отображение равно 0. Мы будем говорить, что модуль F *однозначно делим* на 2, если для всякого $z \in F$ существует единственный элемент $u \in F$, такой, что $2u = z$. (Это снова выполняется, если элемент 2 обратим в R.)

Предложение 4. *Пусть $f\colon E \to F$ — такое отображение, что Δf билинейно, причем модуль F однозначно делим на 2. Тогда отображение $x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}\Delta f(x, x)$ $\mathbf{Z}$-линейно. Если f удовлетворяет условию $f(2x) = 4f(x)$, то f — однородное квадратичное.*

Доказательство. Очевидно.

Под *квадратичной формой* на E понимают однородное квадратичное отображение $f\colon E \to R$ со значениями в R.

В дальнейшем мы в основном будем интересоваться симметрическими билинейными формами. Квадратичные формы будут играть второстепенную роль.

Рассматривая квадратичные формы в § 3—8, мы будем предполагать, что k — поле характеристики $\neq 2$. В оставшейся части главы мы будем также предполагать, что все модули и векторные пространства конечномерны.

§ 3. Симметрические формы, ортогональные базисы

Теорема 1. *Пусть E — векторное пространство над k и g — симметрическая форма на E. Если $\dim E \geqslant 1$, то в E существует ортогональный базис.*