отношению к ортогональному базису ассоциированная матрица формы является диагональной матрицей, а именно

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & \\ & a_2 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & a_r & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 4. Гиперболические пространства

Пусть E — векторное пространство над k с симметрической формой. Мы будем говорить, что E — *гиперболическая плоскость*, если форма невырождена, E имеет размерность 2 и в E существует элемент $w \neq 0$, такой, что $w^2 = 0$. Мы будем говорить, что E — *гиперболическое пространство*, если оно является ортогональной суммой гиперболических плоскостей. В этом случае мы также будем говорить, что форма на E гиперболическая.

Пусть E — гиперболическая плоскость с элементом $w \neq 0$, для которого $w^2 = 0$. Если $E = (w, u)$, где u — некоторый элемент из E, то $u \cdot w \neq 0$, иначе w был бы ненулевым элементом из ядра. Пусть $w \cdot bu = bw \cdot u = 1$, где $b \in k$. Выберем $a \in k$ таким образом, чтобы

$$(aw + bu)^2 = 2abw \cdot u + b^2u^2 = 0.$$

(Это можно сделать, поскольку для a мы получили линейное уравнение.) Положим $v = aw + bu$. Тем самым мы нашли базис для E, а именно $E = (w, v)$, такой, что

$$w^2 = v^2 = 0 \quad \text{и} \quad w \cdot v = 1.$$

Относительно этого базиса матрица нашей формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что, обратно, пространство E, имеющее базис $\{w, v\}$, удовлетворяющий условиям $w^2 = v^2 = 0$ и $w \cdot v = 1$, невырождено и, следовательно, является гиперболической плоскостью. Базис $\{w, v\}$, удовлетворяющий этим соотношениям, будем называть *гиперболической парой*.

Ортогональная сумма невырожденных пространств невырождена, и, следовательно, гиперболическое пространство невырождено. Отметим, что гиперболическое пространство всегда имеет четную размерность.

Лемма. *Пусть E — векторное пространство над k с невырожденной симметрической формой g, F — его некоторое подпространство и F_0 — ядро g в F, причем имеет место ортогональное разложение*

$$F = F_0 \perp U.$$

Пусть $\{w_1, \ldots, w_s\}$ — базис в F_0. Тогда в E существуют элементы $v_1, \ldots, v_s$, перпендикулярные к U, такие, что всякая пара $\{w_i, v_i\}$ является гиперболической парой, порождающей некоторую гиперболическую плоскость P_i, причем имеет место ортогональное разложение

$$U \perp P_1 \perp P_2 \perp \ldots \perp P_s.$$

Доказательство. Пусть

$$U_1 = (w_2, \ldots, w_s) \oplus U.$$

Тогда U_1 содержится в $F_0 \oplus U$ собственным образом, так что $(F_0 \oplus U)^{\perp}$ содержится в $U_1^{\perp}$ собственным образом. Следовательно, существует элемент u_1, такой, что $u_1 \in U_1^{\perp}$, но $u_1 \notin (F_0 \oplus U)^{\perp}$. Имеем $w_1 \cdot u_1 \neq 0$, и значит, (w_1, u_1) — гиперболическая плоскость P_1. Выше мы уже видели, что можно найти элемент $v_1 \in P_1$, такой, что $\{w_1, v_1\}$ — гиперболическая пара. Кроме того, получаем разложение в ортогональную сумму

$$F_1 = (w_2, \ldots, w_s) \perp P_1 \perp U.$$

Ясно, что $(w_2, \ldots, w_s)$ будет ядром g в F_1, и мы можем закончить доказательство по индукции.

§ 5. *Теорема Витта*

Теорема 2. *Пусть E — векторное пространство над k, g — невырожденная симметрическая форма на E. Пусть, далее, F, F' — подпространства в E и σ: $F \to F'$ — изометрия. Тогда σ может быть продолжено до изометрии E на себя.*

Доказательство. Сначала сведем доказательство к случаю, когда F невырождено.

Мы можем записать $F = F_0 \perp U$, как в лемме из предыдущего параграфа. Тогда $\sigma F = F' = \sigma F_0 \perp \sigma U$. Кроме того, $\sigma F_0 = F_0'$ будет