Ортогональная сумма невырожденных пространств невырождена, и, следовательно, гиперболическое пространство невырождено. Отметим, что гиперболическое пространство всегда имеет четную размерность.

Лемма. *Пусть E — векторное пространство над k с невырожденной симметрической формой g, F — его некоторое подпространство и F_0 — ядро g в F, причем имеет место ортогональное разложение*

$$F = F_0 \perp U.$$

Пусть $\{w_1, \ldots, w_s\}$ — базис в F_0. Тогда в E существуют элементы $v_1, \ldots, v_s$, перпендикулярные к U, такие, что всякая пара $\{w_i, v_i\}$ является гиперболической парой, порождающей некоторую гиперболическую плоскость P_i, причем имеет место ортогональное разложение

$$U \perp P_1 \perp P_2 \perp \ldots \perp P_s.$$

Доказательство. Пусть

$$U_1 = (w_2, \ldots, w_s) \oplus U.$$

Тогда U_1 содержится в $F_0 \oplus U$ собственным образом, так что $(F_0 \oplus U)^{\perp}$ содержится в $U_1^{\perp}$ собственным образом. Следовательно, существует элемент u_1, такой, что $u_1 \in U_1^{\perp}$, но $u_1 \notin (F_0 \oplus U)^{\perp}$. Имеем $w_1 \cdot u_1 \neq 0$, и значит, (w_1, u_1) — гиперболическая плоскость P_1. Выше мы уже видели, что можно найти элемент $v_1 \in P_1$, такой, что $\{w_1, v_1\}$ — гиперболическая пара. Кроме того, получаем разложение в ортогональную сумму

$$F_1 = (w_2, \ldots, w_s) \perp P_1 \perp U.$$

Ясно, что $(w_2, \ldots, w_s)$ будет ядром g в F_1, и мы можем закончить доказательство по индукции.

§ 5. Теорема Витта

Теорема 2. *Пусть E — векторное пространство над k, g — невырожденная симметрическая форма на E. Пусть, далее, F, F' — подпространства в E и σ: $F \to F'$ — изометрия. Тогда σ может быть продолжено до изометрии E на себя.*

Доказательство. Сначала сведем доказательство к случаю, когда F невырождено.

Мы можем записать $F = F_0 \perp U$, как в лемме из предыдущего параграфа. Тогда $\sigma F = F' = \sigma F_0 \perp \sigma U$. Кроме того, $\sigma F_0 = F_0'$ будет ядром g в F'. Теперь мы можем расширить и F, и F', как в лемме, до ортогональных сумм

$$U \perp P_1 \perp \ldots \perp P_s \quad \text{и} \quad \sigma U \perp P_1' \perp \ldots \perp P_s',$$

соответствующих выбору некоторого базиса в F_0 и образу этого базиса в F_0'. Таким образом, мы можем продолжить σ до изометрии этих расширенных пространств, являющихся уже невырожденными.

Итак, предположим, что F, F' невырождены, и будем действовать шаг за шагом.

Допустим сначала, что $F' = F$, т. е. что σ — изометрия F на себя. Тогда мы можем продолжить σ на E, просто оставляя каждый элемент из $F^{\perp}$ неподвижным.

Далее, предположим, что $\dim F = \dim F' = 1$ и что $F \neq F'$. Пусть, скажем, $F = (v)$ и $F' = (v')$, где $v' = \sigma v$. Тогда $v^2 = v'^2$. Кроме того, (v, v') имеет размерность 2.

Подпространство (v, v') обладает изометрией, продолжающей σ, которая переводит v в v' и v' в v. Если (v, v') невырождено, то мы можем применить предыдущий шаг и завершить доказательство.

Если (v, v') вырождено, то ядро g на нем имеет размерность 1. Пусть w — базис этого ядра. Существуют элементы a, $b \in k$, такие, что $v' = av + bw$. Тогда $v'^2 = a^2v^2$ и, следовательно, $a = \pm 1$. Заменив w на bw, мы можем считать, что $v' = av + w$. Пусть $z = v + av'$. Применим лемму к пространству

$$(w, z) = (w) \perp (z).$$

Мы найдем элемент $y \in E$, для которого

$$y \cdot z = 0, \quad y^2 = 0 \quad \text{и} \quad w \cdot y = 1.$$

Пространство $(z, w, y) = (z) \perp (w, y)$ невырождено как ортогональная сумма (z) и гиперболической плоскости (w, y). Оно обладает изометрией, при которой

$$z \longleftrightarrow az, \quad w \longleftrightarrow -aw, \quad y \longleftrightarrow -ay.$$

Но $v = \frac{1}{2}(z - aw)$ отображается при этой изометрии на $v' = \frac{1}{2}(az + w)$. Таким образом, с этим случаем мы разделались.

Заканчиваем доказательство по индукции. В силу существования ортогонального базиса (теорема 1) всякое подпространство F размерности > 1 имеет ортогональное разложение в сумму подпространств меньшей размерности. Пусть $F = F_1 \perp F_2$, где $\dim F_1$ и $\dim F_2 \geqslant 1$. Тогда

$$\sigma F = \sigma F_1 \perp \sigma F_2.$$

Пусть $\sigma_1 = \sigma | E_1$ — ограничение σ на F_1. По индукции мы можем продолжить σ_1 до изометрии

$$\bar{\sigma}_1 \colon E \to E.$$

Тогда $\bar{\sigma}_1 (F_1^{\perp}) = (\sigma_1 F_1)^{\perp}$. Так как σF_2 перпендикулярно к $\sigma F_1 = \sigma_1 F_1$, то σF_2 содержится в $\bar{\sigma}_1 (F_1^{\perp})$. Пусть $\sigma_2 = \sigma | F_2$. Тогда изометрия

$$\sigma_2 \colon F_2 \to \sigma_2 F_2 = \sigma F_2$$

продолжается по индукции до изометрии

$$\bar{\sigma}_2 \colon F_1^{\perp} \to \bar{\sigma}_1 (F_1^{\perp}).$$

Пара $(\sigma_1, \bar{\sigma}_2)$ и дает нам искомую изометрию пространства $F_1 \perp F_1^{\perp} = E$ на себя.

Следствие 1. *Пусть E, E' — векторные пространства с невырожденными симметрическими формами. Предположим, что они изометричны. Пусть F, F' — их подпространства и $\sigma' \colon F \to F'$ — изометрия. Тогда σ может быть продолжено до изометрии E на E'.*

Доказательство. Очевидно.

Пусть E — векторное пространство над k с симметрической формой g. Мы будем говорить, что g — *нулевая* форма или что E — *нуль-пространство*, если $\langle x, y \rangle = 0$ для всех x, $y \in E$. Поскольку мы предположили, что характеристика k не равна 2, то условие $x^2 = 0$ для всех $x \in E$ влечет, что g — нулевая форма. Действительно,

$$4x \cdot y = (x + y)^2 - (x - y)^2.$$

В качестве приложений теоремы 2 мы получаем еще несколько следствий.

Следствие 2. *Пусть E — векторное пространство с невырожденной симметрической формой, W — его максимальное нуль-подпространство и W' — некоторое нуль-подпространство. Тогда $\dim W' \leqslant \dim W$ и W' содержится в каком-то максимальном нуль-подпространстве, размерность которого совпадает с $\dim W$.*

Доказательство. Тот факт, что W' содержится в максимальном нуль-подпространстве, следует из леммы Цорна. Предположим, что $\dim W' \geqslant \dim W$. Имеем изометрию W на подпространство в W', которая может быть продолжена до изометрии E на себя. Тогда $\sigma^{-1}(W')$ есть нуль-подпространство, содержащее W и, следовательно, равное W, откуда $\dim W = \dim W'$. Наши утверждения следуют из симметрии.

Пусть E — векторное пространство с невырожденной симметрической формой и W — нуль-подпространство. Согласно лемме § 4, мы можем вложить W в некоторое гиперболическое подпространство H в E, размерность которого равна $2 \dim W$, причем W является максимальным нуль-подпространством в H. Любое такое H будет называться *гиперболическим расширением* W.

Следствие 3. *Пусть E — векторное пространство с невырожденной симметрической формой, W и W' — максимальные нуль-подпространства, а H, H' — гиперболические расширения W, W' соответственно. Тогда H и H' изометричны, равно как и $H^{\perp}$ и $H'^{\perp}$.*

Доказательство. Имеем очевидную изометрию H на H', которая может быть продолжена до изометрии E на себя. Эта изометрия отображает $H^{\perp}$ на $H'^{\perp}$, что и требовалось.

Следствие 4. *Пусть g_1, g_2, h — симметрические формы на векторных пространствах над полем k. Если форма $g_1 \oplus h$ изометрична форме $g_2 \oplus h$ и если g_1, g_2 невырождены, то g_1 изометрична g_2.*

Доказательство. Пусть g_1 — форма на E_1, g_2 — форма на E_2 и h — форма на F. Тогда имеем изометрию $F \oplus E_1$ на $F \oplus E_2$. Продолжим тождественную изометрию id: $F \to F$ до изометрии σ пространства $F \oplus E_1$ на $F \oplus E_2$, согласно следствию 1. Так как E_1 и E_2 — соответствующие ортогональные дополнения к F в этих двух пространствах, то мы должны иметь $\sigma(E_1) = E_2$, что и доказывает требуемое утверждение.

Пусть g — симметрическая форма на векторном пространстве E. Мы будем говорить, что g *определенная*, если $g(x, x) \neq 0$ для любого $x \in E$, $x \neq 0$ (т. е. $x^2 \neq 0$, если $x \neq 0$).

Следствие 5. *Пусть g — симметрическая форма на векторном пространстве. Тогда g обладает разложением в ортогональную сумму*

$$g = g_0 \oplus g_{\text{hyp}} \oplus g_{\text{def}},$$

где g_0 — нулевая форма, g_{hyp} — гиперболическая и g_{def} — определенная. Форма $g_{\text{hyp}} \oplus g_{\text{def}}$ невырожденная. Формы g_0, g_{hyp} и g_{def} однозначно определены с точностью до изометрии.

Доказательство. Разложение $g = g_0 \oplus g_1$, где g_0 — нулевая форма, а g_1 — невырожденная, единственно с точностью до изометрии, поскольку g_0 соответствует ядру g.

Мы можем поэтому предполагать, что g — невырожденная. Если

$$g = g_h \oplus g_d,$$

где g_h — гиперболическая, g_d — определенная, то g_h соответствует гиперболическому расширению максимального нуль-подпространства и, согласно следствию 3, g_h определена однозначно. Следовательно, g_d однозначно определена как ортогональное дополнение к g_h. (Под однозначной определенностью мы, разумеется, понимаем однозначную определенность с точностью до изометрии.)

Мы сокращаем g_{hyp} до g_h и g_{def} до g_d.

§ 6. *Группа Витта*

Пусть g, φ — симметрические формы на векторных пространствах над k. Мы будем говорить, что они *эквивалентны*, если g_d изометрична φ_d. Читатель тотчас проверит, что это действительно отношение эквивалентности. Далее, (ортогональная) сумма двух нулевых форм есть нулевая форма, а сумма двух гиперболических форм — гиперболическая форма. Однако сумма двух определенных форм, разумеется, не обязательно является определенной формой. Мы будем записывать наше отношение эквивалентности так: $g \sim \varphi$. Эквивалентность сохраняется при ортогональных суммах и, следовательно, классы эквивалентности симметрических форм образуют коммутативный моноид.

Теорема 3. *Моноид классов эквивалентности симметрических форм (над полем k) является группой.*

Доказательство. Мы должны показать, что всякий элемент обладает аддитивным обратным. Пусть g — симметрическая форма; мы можем считать ее определенной. Обозначим через $-g$ форму на E, для которой $(-g)(x, y) = -g(x, y)$. Мы утверждаем, что форма $g \oplus (-g)$ эквивалентна 0. Пусть E — пространство, на котором определена форма g. Тогда форма $g \oplus -g$ определена на $E \oplus E$. Пусть W — подпространство, состоящее из всех пар (x, x), где $x \in E$. Тогда W — нуль-пространство для $g \oplus -g$. Так как $\dim (E \oplus E) = 2 \dim W$, то W — максимальное нуль-пространство и форма $g \oplus -g$ — гиперболическая, что и требовалось показать.

Группа из теоремы 3 называется *группой Витта* поля k и обозначается через $W(k)$. Она важна при изучении представлений элементов поля k квадратичной формой f, порожденной g [т. е. $f(x) = g(x, x)$], например, когда хотят классифицировать определенные формы f.

Определим теперь другую группу, которая важна при более функториальном изучении симметрических форм, например, при