Мы можем поэтому предполагать, что g — невырожденная. Если

$$g = g_h \oplus g_d,$$

где g_h — гиперболическая, g_d — определенная, то g_h соответствует гиперболическому расширению максимального нуль-подпространства и, согласно следствию 3, g_h определена однозначно. Следовательно, g_d однозначно определена как ортогональное дополнение к g_h. (Под однозначной определенностью мы, разумеется, понимаем однозначную определенность с точностью до изометрии.)

Мы сокращаем g_{hyp} до g_h и g_{def} до g_d.

§ 6. Группа Витта

Пусть g, φ — симметрические формы на векторных пространствах над k. Мы будем говорить, что они *эквивалентны*, если g_d изометрична φ_d. Читатель тотчас проверит, что это действительно отношение эквивалентности. Далее, (ортогональная) сумма двух нулевых форм есть нулевая форма, а сумма двух гиперболических форм — гиперболическая форма. Однако сумма двух определенных форм, разумеется, не обязательно является определенной формой. Мы будем записывать наше отношение эквивалентности так: $g \sim \varphi$. Эквивалентность сохраняется при ортогональных суммах и, следовательно, классы эквивалентности симметрических форм образуют коммутативный моноид.

Теорема 3. *Моноид классов эквивалентности симметрических форм (над полем k) является группой.*

Доказательство. Мы должны показать, что всякий элемент обладает аддитивным обратным. Пусть g — симметрическая форма; мы можем считать ее определенной. Обозначим через $-g$ форму на E, для которой $(-g)(x, y) = -g(x, y)$. Мы утверждаем, что форма $g \oplus (-g)$ эквивалентна 0. Пусть E — пространство, на котором определена форма g. Тогда форма $g \oplus -g$ определена на $E \oplus E$. Пусть W — подпространство, состоящее из всех пар (x, x), где $x \in E$. Тогда W — нуль-пространство для $g \oplus -g$. Так как $\dim (E \oplus E) = 2 \dim W$, то W — максимальное нуль-пространство и форма $g \oplus -g$ — гиперболическая, что и требовалось показать.

Группа из теоремы 3 называется *группой Витта* поля k и обозначается через $W(k)$. Она важна при изучении представлений элементов поля k квадратичной формой f, порожденной g [т. е. $f(x) = g(x, x)$], например, когда хотят классифицировать определенные формы f.

Определим теперь другую группу, которая важна при более функториальном изучении симметрических форм, например, при изучении квадратичных форм, возникающих при исследовании многообразий в топологии.

Заметим, что классы изометрии невырожденных симметрических форм (над k) образуют моноид $M(k)$, законом композиции в котором служит взятие ортогональной суммы. Кроме того, в нем выполняется закон сокращения (следствие 4 теоремы 2). Пусть

$$\gamma:\ M(k) \to WG(k)$$

— каноническое отображение $M(k)$ в группу Гротендика этого моноида, которую мы будем называть *группой Витта — Гротендика* над k. Как мы знаем, из выполнимости закона сокращения следует, что γ инъективно.

Пусть g — симметрическая невырожденная форма над k. Мы определяем ее размерность $\dim g$ как размерность того пространства E, на котором она определена. Ясно, что

$$\dim (g \oplus g') = \dim g + \dim g'.$$

Следовательно, можно продолжить $\dim$ до гомоморфизма

$$\dim:\ WG(k) \to \mathbf{Z}.$$

Этот гомоморфизм расщепляется, так как существует невырожденная симметрическая форма размерности 1.

Пусть $WG_0(k)$ — ядро гомоморфизма $\dim$. Если g — невырожденная симметрическая форма, то ее определителем $\det(g)$ мы будем считать взятый по модулю квадратов в k^* определитель матрицы G, представляющей g относительно некоторого базиса. Как элемент из k^*/k^{*2} он однозначно определен. Положим $\det$ 0-формы равным 1. Тогда $\det$ есть гомоморфизм

$$\det:\ M(k) \to k^*/k^{*2}$$

и может поэтому быть продолжен до гомоморфизма, обозначаемого по-прежнему через $\det$, группы Витта — Гротендика:

$$\det:\ WG(k) \to k^*/k^{*2}.$$

Некоторые другие свойства группы Витта — Гротендика приведены в упражнениях.

§ 7. Симметрические формы над упорядоченными полями

Теорема 4 (Сильвестр). *Пусть k — упорядоченное поле и E — векторное пространство над k с невырожденной симметрической формой g. Существует целое число $r \geqslant 0$, такое, что каков бы ни был ортогональный базис $\{v_1, \ldots, v_n\}$ для E, среди*