

изучении квадратичных форм, возникающих при исследовании многообразий в топологии.

Заметим, что классы изометрии невырожденных симметрических форм (над k) образуют моноид $M(k)$, законом композиции в котором служит взятие ортогональной суммы. Кроме того, в нем выполняется закон сокращения (следствие 4 теоремы 2). Пусть

$$\psi: M(k) \rightarrow WG(k)$$

— каноническое отображение $M(k)$ в группу Гrotендика этого монида, которую мы будем называть *группой Витта — Гrotендика* над k . Как мы знаем, из выполнимости закона сокращения следует, что ψ инъективно.

Пусть g — симметрическая невырожденная форма над k . Мы определяем ее размерность $\dim g$ как размерность того пространства E , на котором она определена. Ясно, что

$$\dim(g \oplus g') = \dim g + \dim g'.$$

Следовательно, можно продолжить \dim до гомоморфизма

$$\dim: WG(k) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

Этот гомоморфизм расщепляется, так как существует невырожденная симметрическая форма размерности 1.

Пусть $WG_0(k)$ — ядро гомоморфизма \dim . Если g — невырожденная симметрическая форма, то ее определителем $\det(g)$ мы будем считать взятый по модулю квадратов в k^* определитель матрицы G , представляющей g относительно некоторого базиса. Как элемент из k^*/k^{*2} он однозначно определен. Положим $\det 0$ -формы равным 1. Тогда \det есть гомоморфизм

$$\det: M(k) \rightarrow k^*/k^{*2}$$

и может поэтому быть продолжен до гомоморфизма, обозначаемого по-прежнему через \det , группы Витта — Гrotендика:

$$\det: WG(k) \rightarrow k^*/k^{*2}.$$

Некоторые другие свойства группы Витта — Гrotендика приведены в упражнениях.

§ 7. Симметрические формы над упорядоченными полями

Теорема 4 (Сильвестр). Пусть k — упорядоченное поле и E — векторное пространство над k с невырожденной симметрической формой g . Существует целое число $r \geqslant 0$, такое, что каков бы ни был ортогональный базис $\{v_1, \dots, v_n\}$ для E , среди

n элементов v_1^2, \dots, v_n^2 в точности r будут > 0 и в точности $n - r$ будут < 0 .

Доказательство. Пусть $a_i = v_i^2$ для $i = 1, \dots, n$. После изменения нумерации базисных элементов мы можем считать, что, скажем, $a_1, \dots, a_r > 0$ и $a_i < 0$ для $i > r$. Пусть $\{w_1, \dots, w_n\}$ — любой ортогональный базис и $b_i = w_i^2$. Допустим, $b_1, \dots, b_s > 0$ и $b_j < 0$ для $j > s$. Докажем, что $r = s$. Действительно, достаточно доказать, что

$$v_1, \dots, v_r, w_{s+1}, \dots, w_n$$

линейно независимы, так как тогда $r + n - s \leq n$, откуда $r \leq s$ и $r = s$ в силу симметрии. Предположим, что

$$x_1 v_1 + \dots + x_r v_r + y_{s+1} w_{s+1} + \dots + y_n w_n = 0.$$

Тогда

$$x_1 v_1 + \dots + x_r v_r = -y_{s+1} w_{s+1} - \dots - y_n w_n.$$

Возвведение в квадрат обеих частей равенства дает

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2 = b_{s+1} y_{s+1}^2 + \dots + b_n y_n^2.$$

Левая сторона ≥ 0 , а правая сторона ≤ 0 . Следовательно, обе стороны равны 0, откуда вытекает, что $x_i = y_j = 0$, другими словами, что наши векторы линейно независимы.

Следствие 1. *Предположим, что всякий положительный элемент в k является квадратом. Тогда существует ортогональный базис $\{v_1, \dots, v_n\}$ пространства E , такой, что $v_i^2 = 1$ для $i \leq r$ и $v_i^2 = -1$ для $i > r$, причем число r однозначно определено.*

Доказательство. Разделим каждый вектор произвольного ортогонального базиса на квадратный корень из абсолютной величины его квадрата.

Базис, обладающий свойством, описанным в следствии, называется *ортонормальным*. Если X — элемент из E , имеющий относительно такого базиса координаты (x_1, \dots, x_n) , то

$$X^2 = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

Будем говорить, что симметрическая форма g *положительно определенная*, если $X^2 > 0$ для всех $X \in E$, $X \neq 0$. Это имеет место тогда и только тогда, когда в теореме 4 $r = n$. Мы будем говорить, что g *отрицательно определенная*, если $X^2 < 0$ для всех $X \in E$, $X \neq 0$.

Следствие 2. Векторное пространство E обладает ортогональным разложением $E = E^+ \perp E^-$, таким, что g будет положительно определенной на E^+ и отрицательно определенной на E^- . Размерность E^+ (или E^-) одна и та же во всех таких разложениях.

Предположим теперь, что форма g положительно определенная и что всякий положительный элемент в k является квадратом.

Определим норму элемента $v \in E$, положив

$$|v| = \sqrt{v \cdot v}.$$

Тогда $|v| > 0$, если $v \neq 0$. Имеем также неравенство Шварца

$$|v \cdot w| \leq |v| \cdot |w|$$

для всех $v, w \in E$. Оно доказывается обычным способом. Разложим

$$0 \leq (av \pm bw)^2 = (av \pm bw) \cdot (av \pm bw)$$

по билинейности и положим $a = |w|$ и $b = |v|$. Получим

$$\mp 2abv \cdot w \leq 2|v|^2|w|^2.$$

Если $|v|$ или $|w| = 0$, то наше неравенство тривиально. Если ни один из этих элементов $\neq 0$, то разделим на $|v||w|$ и получим то, что требуется.

Из неравенства Шварца выводится неравенство треугольника

$$|v + w| \leq |v| + |w|.$$

Мы предоставляем вывод читателю в качестве шаблонного упражнения.

В случае когда мы имеем положительно определенную форму, существует канонический путь получения ортонормального базиса посредством индуктивного процесса, начинающегося с произвольного базиса $\{v_1, \dots, v_n\}$. Пусть

$$v'_1 = \frac{1}{|v_1|} v_1.$$

Тогда v'_1 имеет норму 1. Положим

$$w_2 = v_2 - (v_2 \cdot v'_1) v'_1,$$

а затем

$$v'_2 = \frac{1}{|w_2|} w_2.$$

По индукции полагаем

$$w_r = v_r - (v_r \cdot v'_1) v'_1 - \dots - (v_r \cdot v'_{r-1}) v'_{r-1}$$

и

$$v'_r = \frac{1}{|w_r|} w_r.$$

Тогда $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ — ортонормальный базис. Только что описанный индуктивный процесс известен под названием *ортогонализации Грама — Шмидта*.

§ 8. Алгебра Клиффорда

Пусть E — векторное пространство над полем k и g — симметрическая форма на E . Было бы желательно найти универсальную алгебру над k , в которую можно вложить E , и такую, что квадрат в этой алгебре соответствует значению квадратичной формы на E . Более точно, под *алгеброй Клиффорда* формы g мы будем понимать пару $(C(g), \rho)$ — алгебру $C(g)$ и линейное отображение $\rho: E \rightarrow C(g)$, — обладающую следующими свойствами: (1) для всех $X \in E$ имеем $\rho(X)^2 = g(X, X) \cdot 1$; (2) если $\psi: E \rightarrow L$ — линейное отображение E в k -алгебру L , такое, что

$$\psi(X)^2 = g(X, X) \cdot 1$$

(1 — единичный элемент в L) для всех $X \in E$, то существует однозначно определенный гомоморфизм алгебр

$$C(\psi) = \psi_*: C(g) \rightarrow L,$$

для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\rho} & C(g) \\ & \searrow \psi & \swarrow \psi_* \\ & L & \end{array}$$

Согласно абстрактной чепухе¹⁾, алгебра Клиффорда формы g однозначно определена с точностью до единственного изоморфизма. Кроме того, ясно, что если $(C(g), \rho)$ существует, то $C(g)$ как алгебра над k порождается образом $\rho(E)$ отображения ρ .

Мы будем писать $\rho = \rho_g$, если необходимо явно указать, о какой форме g идет речь.

Заменяя в соотношении

$$\rho(X)^2 = g(X, X) \cdot 1$$

X на $X + Y$, находим

$$\rho(X)\rho(Y) + \rho(Y)\rho(X) = 2g(X, Y) \cdot 1.$$

Теорема 5. Пусть g — симметрическая билинейная форма на векторном пространстве E над k . Тогда алгебра Клиффорда $(C(g), \rho)$ существует. Отображение ρ инъективно, и $C(g)$ имеет размерность 2^n над k , где $n = \dim E$.

¹⁾ См. стр. 126. — Прим. ред.