Тогда $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ — ортонормальный базис. Только что описанный индуктивный процесс известен под названием *ортогонализации Грама — Шмидта.*

§ 8. Алгебра Клиффорда

Пусть E — векторное пространство над полем k и g — симметрическая форма на E. Было бы желательно найти универсальную алгебру над k, в которую можно вложить E, и такую, что квадрат в этой алгебре соответствует значению квадратичной формы на E. Более точно, под *алгеброй Клиффорда* формы g мы будем понимать пару $(C(g), \rho)$ — алгебру $C(g)$ и линейное отображение $\rho\colon E \to C(g)$, — обладающую следующими свойствами: (1) для всех $X \in E$ имеем $\rho(X)^2 = g(X, X)\cdot 1$; (2) если $\psi\colon E \to L$ — линейное отображение E в k-алгебру L, такое, что

$$\psi(X)^2 = g(X, X)\cdot 1$$

(1 — единичный элемент в L) для всех $X \in E$, то существует однозначно определенный гомоморфизм алгебр

$$C(\psi) = \psi_*\colon C(g) \to L,$$

для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\psi"'] & C(g) \arrow[d, "\psi_*"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Согласно абстрактной чепухе[1]), алгебра Клиффорда формы g однозначно определена с точностью до единственного изоморфизма. Кроме того, ясно, что если $(C(g), \rho)$ существует, то $C(g)$ как алгебра над k порождается образом $\rho(E)$ отображения ρ.

Мы будем писать $\rho = \rho_g$, если необходимо явно указать, о какой форме g идет речь.

Заменяя в соотношении

$$\rho(X)^2 = g(X, X)\cdot 1$$

X на $X + Y$, находим

$$\rho(X)\rho(Y) + \rho(Y)\rho(X) = 2g(X, Y)\cdot 1.$$

Теорема 5. *Пусть g — симметрическая билинейная форма на векторном пространстве E над k. Тогда алгебра Клиффорда $(C(g), \rho)$ существует. Отображение ρ инъективно, и $C(g)$ имеет размерность 2^n над k, где $n = \dim E$.*

---

[1]) См. стр. 126. — *Прим. ред.*

Для того чтобы доказать теорему 5, мы сначала найдем соотношения, которым должны удовлетворять алгебра L и линейное отображение ψ: $E \to L$, такое, что $\psi(X)^2 = g(X, X) \cdot 1$. Мы будем следовать рассуждениям Артина в „Геометрической алгебре“.

Пусть $S_1, \ldots, S_r$ — подмножества заданного множества M. Определим их *сумму* (которая не будет объединением) как множество элементов из M, содержащихся в нечетном числе множеств S_i, $i = 1, \ldots, r$.

Легко проверяются следующие правила:

$$(S_1 + \ldots + S_r) + S_{r+1} = S_1 + \ldots + S_{r+1},$$
$$(S_1 + \ldots + S_r) \cap T = (S_1 \cap T) + \ldots + (S_r \cap T),$$

для любого подмножества T в M.

Пустое множество обозначается, как обычно, через $\varnothing$.

Пусть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — ортогональный базис для E над k. Положим $a_i = v_i^2$ и $\psi(v_i) = e_i$. Тогда по предположению

$$e_i^2 = a_i \text{ и } e_i e_j + e_j e_i = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Пусть S — подмножество множества $M = \{1, \ldots, n\}$ и $i_1, \ldots, i_m$ — элементы S, упорядоченные так, что $i_1 < \ldots < i_m$. Положим $e_S = e_{i_1} \ldots e_{i_m}$. Индукцией легко показать, что для любых подмножеств S, T в $\{1, \ldots, n\}$

$$e_S e_T = \prod_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (s, t) \prod_{i \in S \cap T} v_i^2 e_{S+T},$$

где символ (s, t) по определению равен 1 при $s \leqslant t$ и -1 при $s > t$. Таким образом, правило вычисления произведения двух „одночленов“ от $e_1, \ldots, e_n$ определяется чисто комбинаторно в терминах S и T и заданных нам квадратов $v_1^2, \ldots, v_n^2$. Кроме того, алгебра, порожденная $\psi(E)$, порождается элементами $e_1, \ldots, e_n$.

Покажем теперь, как предыдущее комбинаторное правило позволяет нам определить универсальную алгебру.

Каждому подмножеству S из $\{1, \ldots, n\}$ сопоставим символ e_S. Пусть $C(g)$ — свободный модуль над k, порожденный этими символами e_S (S пробегает все подмножества в $\{1, \ldots, n\}$). Тогда $C(g)$ имеет размерность 2^n над k. Определим умножение в $C(g)$. Для подмножеств S, T множества $\{1, \ldots, n\}$ положим

$$\alpha(S, T) = \prod_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (s, t) \prod_{i \in S \cap T} v_i^2.$$

Если $\sum_S a_S e_S$ и $\sum_T b_T e_T$ — элементы из $C(g)$ с коэффициентами a_S, $b_T \in k$, то определим их произведение следующим образом:

$$\left(\sum_S a_S e_S\right)\left(\sum_T b_T e_T\right) = \sum_{S,T} a_S b_T \alpha(S, T)\, e_{S+T}.$$

Мы должны показать, что это произведение ассоциативно. Для этого, очевидно, достаточно будет доказать, что для любых подмножеств S, T, R множества $\{1, \ldots, n\}$

$$(e_S e_T)\, e_R = e_S\,(e_T e_R);$$

это последнее соотношение будет проверяться в лоб.

По определению

$$e_S e_T = \alpha(S, T)\, e_{S+T}.$$

Приступая к доказательству, сделаем подстановку

$$(e_S e_T) e_R = \prod_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (s, t) \prod_{\substack{j \in S+T \\ r \in R}} (j, r) \prod_{i \in S \cap T} v_i^2 \prod_{\lambda \in (S+T) \cap R} v_\lambda^2 e_{S+T+R}$$

и перепишем правую часть в более симметричной форме.

Правая часть состоит из произведений некоторых знаков и некоторых квадратов. Сначала рассмотрим знаки.

Если j будет пробегать S, а затем T, то любое $j \in S \cap T$ появится дважды. Таким образом, второе произведение совпадает с произведением, взятым по $j \in S$ и $j \in T$; другими словами, произведение, дающее знак, может быть записано в виде

$$\prod_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (s, t) \prod_{\substack{s \in S \\ r \in R}} (s, r) \prod_{\substack{t \in T \\ r \in R}} (t, r).$$

Теперь займемся произведением квадратов. Имеем

$$(S + T) \cap R = (S \cap R) + (T \cap R).$$

Если ν принадлежит всем трем множествам S, T, R, то ν лежит в $S \cap T$, но не в $(S \cap R) + (T \cap R)$. Если ν принадлежит S и T, но не R, то ν лежит в $S \cap T$, но не в $(S \cap R) + (T \cap R)$. Если ν лежит в S и R, но не в T, или в T и R, но не в S, то ν не лежит в $S \cap T$, но лежит в $(S \cap R) + (T \cap R)$. Наконец, если ν лежит лишь в одном из множеств S, T, R или не лежит ни в одном из них, то ν не лежит ни в $S \cap T$, ни в $(S \cap R) + (T \cap R)$. Таким образом, последние два произведения могут быть записаны в виде произведения

$$\prod_\nu v_\nu^2$$

по тем ν, которые встречаются более чем в одном из множеств S, T, R. Это произведение симметрично по S, T, R. Из того, что мы показали, сразу же следует равенство

$$(e_S e_T)\, e_R = e_S\, (e_T e_R).$$

Это и означает, что произведение, которое мы определили в $C(g)$, ассоциативно. Другие аксиомы кольца проверяются тривиально, и элементы $\{e_S\}$ образуют базис алгебры $C(g)$, которая имеет поэтому размерность 2^n.

Линейное отображение

$$\rho\colon\ E \to C(g),$$

для которого $\rho(v_i) = e_{\{i\}}$, очевидно, инъективно. Будем писать $e_i = e_{\{i\}}$. Если

$$X = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n,$$

то

$$\begin{aligned}\rho(X)^2 &= (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n)(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = \\ &= (x_1^2 a_1 + \ldots + x_n^2 a_n)\, e_\phi,\end{aligned}$$

где e_ϕ — единичный элемент алгебры $C(g)$, поскольку $e_i e_j + e_j e_i = 0$ для $i \neq j$. Таким образом, наши требования, касающиеся квадратов, удовлетворяются.

Если $\psi\colon E \to L$ — любое такое линейное отображение в алгебру над k, что $\psi(X)^2 = g(X, X) \cdot 1$, то мы можем определить кольцевой гомоморфизм $C(g)$ в L, для которого требуемая диаграмма коммутативна. Действительно, пусть $e'_i = \psi(v_i)$. Положим

$$e'_S = e'_{i_1} \ldots e'_{i_m},$$

где $i_1 < \ldots < i_m$ — элементы множества S. Определим

$$\psi_*\colon\ C(g) \to L,$$

положив

$$\sum a_S e_S \mapsto \sum a_S e'_S.$$

Так как элементы $\{e_S\}$ образуют базис $C(g)$, то это отображение однозначно определено и является линейным отображением. Замечания в начале доказательства показывают, что это отображение является также гомоморфизмом колец, и диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\psi"'] & & C(g) \arrow[dl, "\psi_*"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Это доказывает все, что требовалось.