§ 9. Знакопеременные формы

Пусть E — векторное пространство над полем k, на которое мы не налагаем теперь никаких ограничений. Пусть f — знакопеременная форма на E, т. е. билинейное отображение $f\colon E\times E\to k$, такое, что $f(x, x)=x^2=0$ для всех $x\in E$. Тогда

$$x\cdot y=-y\cdot x$$

для всех $x, y\in E$, что обнаруживается подстановкой $(x+y)$ вместо x в соотношение $x^2=0$.

Как и для симметрических форм, мы определяем *гиперболическую плоскость* (для знакопеременных форм) как двумерное невырожденное пространство. (На этот раз мы автоматически получаем элемент w, такой, что $w^2=0$, $w\neq 0$, так что нет надобности специально выделять это.) Если P — гиперболическая плоскость и $w\in P$, $w\neq 0$, то в P существует элемент $y\neq 0$, для которого $w\cdot y\neq 0$. Деля y на константу, мы можем считать, что $w\cdot y=1$. Тогда $y\cdot w=-1$. Следовательно, матрица формы относительно базиса $\{w, y\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как и прежде, пара w, y называется *гиперболической парой*. Если заданы двумерное векторное пространство над k с билинейной формой и пара элементов $\{w, y\}$, удовлетворяющих соотношениям

$$w^2=y^2=0,\quad y\cdot w=-1,\quad w\cdot y=1,$$

то легко видеть, что рассматриваемая форма знакопеременная и (w, y) — гиперболическая плоскость для этой формы.

При заданной знакопеременной форме f на E мы будем говорить, что пространство E (или f) *гиперболическое*, если E является ортогональной суммой гиперболических плоскостей. Мы будем говорить, что E (или f) *нулевое*, если $x\cdot y=0$ для всех $x, y\in E$.

Теорема 6. *Пусть f — знакопеременная форма на векторном пространстве E над k. Тогда E будет ортогональной суммой своего ядра и гиперболического подпространства. Если E невырождено, то E является гиперболическим пространством и его размерность четна.*

Доказательство. Дополнительное подпространство к ядру невырождено, и, следовательно, мы можем считать, что E невырождено. Пусть $w\in E$, $w\neq 0$. Существует элемент $y\in E$, для которого $w\cdot y\neq 0$. Тогда подпространство (w, y) невырождено, следовательно, является гиперболической плоскостью P. Имеем $E=P\oplus P^{\perp}$, и $P^{\perp}$ невырождено. Заканчиваем доказательство по индукции.

Следствие 1. *Все знакопеременные невырожденные формы заданной размерности над полем k изометричны.*

Из теоремы 6 видно, что существует базис пространства E, относительно которого матрица знакопеременной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Для удобства записи мы переупорядочим базисные элементы нашей ортогональной суммы гиперболических плоскостей таким образом, чтобы матрица формы приняла вид

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где I_r — единичная матрица размера $r \times r$. Матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}$$

называется *стандартной знакопеременной матрицей.*

Следствие 2. *Пусть E — векторное пространство над k с невырожденной симметрической формой, обозначаемой через $\langle , \rangle$, и Ω — невырожденная знакопеременная форма на E. Тогда существуют разложение в прямую сумму $E = E_1 \oplus E_2$ и симметрический автоморфизм A пространства E (относительно $\langle , \rangle$), обладающие следующим свойством. Если $x, y \in E$ записаны в виде*

$$x = (x_1, x_2), \quad где \quad x_1 \in E_1 \quad и \quad x_2 \in E_2,$$
$$y = (y_1, y_2), \quad где \quad y_1 \in E_1 \quad и \quad y_2 \in E_2,$$

то

$$\Omega(x, y) = \langle Ax_1, y_2 \rangle - \langle Ax_2, y_1 \rangle.$$

Доказательство. Возьмем такой базис в E, что матрица формы Ω относительно этого базиса является стандартной знакопеременной матрицей. Пусть f — симметрическая невырожденная форма на E, задаваемая относительно этого базиса матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда мы получаем разложение E в прямую сумму подпространств E_1, E_2 (соответствующих первым n и соответственно последним n координатам), такое, что

$$\Omega(x, y) = f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1).$$

Так как форма $\langle , \rangle$ предполагается невырожденной, то мы можем найти автоморфизм A, обладающий желаемым свойством, причем A является симметрическим, поскольку форма f симметрическая.

§ 10. Пфаффиан

У знакопеременной матрицы G по определению ${}^tG = -G$ и диагональные элементы равны 0 Как мы видели в гл. XIII, § 6, это матрица знакопеременной формы Пусть G — матрица размера $n \times n$, где n — четное. (Для нечетного n см. упражнения)

Мы начнем с поля характеристики 0 В силу теоремы 6 существует неособая матрица C, для которой ${}^tCGC$ будет матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$\det(C)^2 \det(G) = 1 \quad \text{или} \quad 0$$

в соответствии с тем, тривиально ядро знакопеременной формы или нет Таким образом, мы видим, что в любом случае $\det(G)$ является квадратом в поле

Перейдем теперь к кольцу целых чисел $\mathbf{Z}$. Пусть t_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ — $n(n-1)/2$ алгебраически независимых элементов над $\mathbf{Q}$. Положим $t_{ii} = 0$ для $i = 1, \ldots, n$ и $t_{ij} = -t_{ji}$ для $i > j$. Тогда матрица $T = (t_{ij})$ — знакопеременная и, следовательно, $\det(T)$ есть квадрат в поле $\mathbf{Q}(t)$, полученном из $\mathbf{Q}$ присоединением всех переменных t_{ij}. Однако $\det(T)$ является многочленом из $\mathbf{Z}[t]$ и в силу однозначности разложения на множители в $\mathbf{Z}[t]$ $\det(T)$ — квадрат некоторого многочлена из $\mathbf{Z}[t]$. Запишем

$$\det(T) = P(t)^2.$$