

ременной матрицей. Пусть f — симметрическая невырожденная форма на E , задаваемая относительно этого базиса матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда мы получаем разложение E в прямую сумму подпространств E_1 , E_2 (соответствующих первым n и соответственно последним n координатам), такое, что

$$\Omega(x, y) = f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1).$$

Так как форма \langle , \rangle предполагается невырожденной, то мы можем найти автоморфизм A , обладающий желаемым свойством, причем A является симметрическим, поскольку форма f симметрическая.

§ 10. Пфаффиан

У знакопеременной матрицы G по определению ${}^t G = -G$ и диагональные элементы равны 0. Как мы видели в гл. XIII, § 6, это матрица знакопеременной формы. Пусть G — матрица размера $n \times n$, где n — четное. (Для нечетного n см. упражнения.)

Мы начнем с поля характеристики 0. В силу теоремы 6 существует неособая матрица C , для которой ${}^t C G C$ будет матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$\det(C)^2 \det(G) = 1 \quad \text{или} \quad 0$$

в соответствии с тем, тривиально ядро знакопеременной формы или нет. Таким образом, мы видим, что в любом случае $\det(G)$ является квадратом в поле

Перейдем теперь к кольцу целых чисел \mathbf{Z} . Пусть t_{ij} ($1 \leq i < j \leq n$) — $n(n-1)/2$ алгебраически независимых элементов над \mathbf{Q} . Положим $t_{ii} = 0$ для $i = 1, \dots, n$ и $t_{ij} = -t_{ji}$ для $i > j$. Тогда матрица $T = (t_{ij})$ — знакопеременная и, следовательно, $\det(T)$ есть квадрат в поле $\mathbf{Q}(t)$, полученном из \mathbf{Q} присоединением всех переменных t_{ij} . Однако $\det(T)$ является многочленом из $\mathbf{Z}[t]$ и в силу однозначности разложения на множители в $\mathbf{Z}[t]$ $\det(T)$ — квадрат некоторого многочлена из $\mathbf{Z}[t]$. Запишем

$$\det(T) = P(t)^2.$$

Многочлен P однозначно определен с точностью до множителя ± 1 . Если мы подставим такие значения для t_{ij} , чтобы матрица T приняла специальный вид

$$\begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ -I_{n/2} & 0 \end{pmatrix},$$

то получим, что существует однозначно определенный многочлен P с целочисленными коэффициентами, принимающий значение 1 для этого специализированного множества значений (t) . Мы будем называть P общим пфаффианом размера n и обозначать его через Pf .

Пусть R — коммутативное кольцо. Имеем гомоморфизм

$$\mathbf{Z}[t] \rightarrow R[t],$$

индуцированный однозначно определенным гомоморфизмом \mathbf{Z} в R . Образ общего пфаффиана размера n в $R[t]$ будет многочленом с коэффициентами в R , который мы по-прежнему обозначаем через Pf . Если G — знакопеременная матрица с коэффициентами в R , то обозначим через $\text{Pf}(G)$ значение $\text{Pf}(t)$, полученное после подстановки g_{ij} вместо t_{ij} в Pf . Так как определитель коммутирует с гомоморфизмами, то имеет место

Теорема 7. Пусть R — коммутативное кольцо и $(g_{ij}) = G$ — знакопеременная матрица с $g_{ij} \in R$. Тогда

$$\det(G) = (\text{Pf}(G))^2.$$

Кроме того, для всякой матрицы C размера $n \times n$ над R

$$\text{Pf}(CG^tC) = \det(C)\text{Pf}(G).$$

Доказательство. Первое утверждение уже было доказано выше. Второе достаточно доказать над \mathbf{Z} . Пусть элементы u_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) алгебраически независимы над \mathbf{Q} , причем u_{ij}, t_{ij} алгебраически независимы над \mathbf{Q} . Пусть U — матрица (u_{ij}) . Тогда

$$\text{Pf}(UT^tU) = \pm \det(U)\text{Pf}(T),$$

что получается немедленно взятием квадратов от обеих частей. Подставим значения в U и T , такие, что U становится единичной матрицей, а T — стандартной знакопеременной матрицей. Заключаем, что с правой стороны должен быть знак $+$. Тем самым, как обычно, наше утверждение справедливо для любых подстановок вместо U матрицы над R и вместо T знакопеременной матрицы над R , что и требовалось показать.