§ 11. Эрмитовы формы

Пусть k_0 — некоторое упорядоченное поле (подполе поля вещественных чисел, если вам хочется), и пусть $k = k_0(i)$, где $i = \sqrt{-1}$. Тогда k обладает автоморфизмом порядка 2, неподвижным полем для которого служит k_0.

Пусть E — конечномерное векторное пространство над k. Мы будем рассматривать эрмитову форму на E, т. е. отображение

$$E \times E \to k,$$

записываемое в виде

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle,$$

которое k-линейно по своему первому аргументу, k-антилинейно по второму аргументу и таково, что

$$\langle x, y \rangle = \langle \overline{y, x} \rangle$$

для всех $x, y \in E$.

Заметим, что $\langle x, x \rangle \in k_0$ для всех $x \in E$. Это по существу является причиной того, что доказательства утверждений, касающихся симметрических форм, сохраняются без существенных изменений в эрмитовом случае. Мы сейчас перечислим свойства, относящиеся к этому случаю.

Теорема 8. *Существует ортогональный базис. Если форма невырожденная, то существует целое число $r \geqslant 0$, такое, что, каков бы ни был ортогональный базис $\{v_1, \ldots, v_n\}$, среди n элементов*

$$\langle v_1, v_1 \rangle, \ldots, \langle v_n, v_n \rangle$$

точно r больше 0 и $n - r$ меньше 0.

Ортогональный базис $\{v_1, \ldots, v_n\}$, для которого $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ или -1, называется *ортонормальным базисом*.

Следствие 1. *Предположим, что форма невырождена и что всякий положительный элемент в k_0 является квадратом. Тогда существует ортонормальный базис.*

Мы будем говорить, что эрмитова форма *положительно определенная*, если $\langle x, x \rangle > 0$ для всех $x \in E$. Мы будем говорить, что она *отрицательно определенная*, если $\langle x, x \rangle < 0$ для всех $x \in E$.

Следствие 2. *Предположим, что форма невырождена. Тогда E допускает ортогональное разложение $E = E^+ \perp E^-$, такое, что форма является положительно определенной на E^+ и отрицательно определенной на E^-. Размерность E^+ (или E^-) одинакова во всех таких разложениях.*

Доказательства теоремы 8 и ее следствий идентичны доказательствам аналогичных результатов для симметрических форм и предоставляются читателю.

Для любого k-линейного отображения $A\colon E \to E$ имеет место *поляризационное тождество*, а именно

$$\langle A(x+y),\ (x+y)\rangle - \langle A(x-y),\ (x-y)\rangle = 2[\langle Ax,\ y\rangle + \langle Ay,\ x\rangle].$$

Если $\langle Ax,\ x\rangle = 0$ для всех x, то, заменив x на ix, получим

$$\langle Ax,\ y\rangle + \langle Ay,\ x\rangle = 0,$$
$$i\langle Ax,\ y\rangle - i\langle Ay,\ x\rangle = 0.$$

Отсюда заключаем:

если $\langle Ax,\ x\rangle = 0$ для всех x, то $A = 0$.

Это единственное утверждение, которое не имеет аналога в случае симметрических форм. Наличие i при получении одного из предыдущих линейных уравнений существенно для вывода. На практике это утверждение используется в комплексном случае и аналогичная ситуация встречается в вещественном случае, когда отображение A симметрическое. Формулировка для симметрических отображений очевидна.

Предположим, что эрмитова форма — положительно определенная и что всякий положительный элемент в k_0 является квадратом.

Имеет место *неравенство Шварца*, а именно

$$|\langle x,\ y\rangle|^2 \leqslant \langle x,\ x\rangle\langle y,\ y\rangle,$$

доказательство которого снова получается разложением

$$0 \leqslant \langle \alpha x + \beta y,\ \alpha x + \beta y\rangle$$

и подстановкой $\alpha = \langle y,\ y\rangle$ и $\beta = -\langle x,\ y\rangle$.

Определим норму $|x|$, положив

$$|x| = \sqrt{\langle x,\ x\rangle}.$$

Тогда сразу же получаем *неравенство треугольника*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

и для $\alpha \in k$ равенство

$$|\alpha x| = |\alpha||x|.$$

Точно так же, как в симметрическом случае, для заданного базиса можно найти ортонормальный базис посредством индуктивного процесса вычитания последовательных проекций. Мы предоставляем это читателю.