§ 12. Спектральная теорема (эрмитов случай)

В этом параграфе E будет конечномерным векторным пространством над $\mathbf{C}$ размерности $\geqslant 1$, снабженным положительно определенной эрмитовой формой $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$.

Пусть A: $E \to E$ — линейное отображение (т. е. $\mathbf{C}$-линейное отображение) пространства E в себя. Для фиксированного $y \in E$ отображение $x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ есть линейный функционал и, следовательно, существует однозначно определенный элемент $y^* \in E$, такой, что

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$$

для всех $x \in E$. Определим отображение A^*: $E \to E$, положив $A^* y = y^*$. Непосредственно ясно, что отображение A^* линейное; мы будем называть A^* *сопряженным* к A относительно нашей эрмитовой формы.

Тривиально проверяются следующие формулы для произвольных линейных отображений A, B пространства E в себя:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad A^{**} = A,$$
$$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, \qquad (AB)^* = B^* A^*.$$

Линейное отображение A^* называется *самосопряженным* (или *эрмитовым*), если $A^* = A$.

Предложение 5. *Отображение A тогда и только тогда эрмитово, когда $\langle Ax, x \rangle$ вещественно для всех $x \in E$.*

Доказательство. Пусть A эрмитово. Тогда

$$\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle x, Ax \rangle} = \langle x, Ax \rangle,$$

откуда вытекает, что $\langle Ax, x \rangle$ вещественно. Обратно, предположим, что $\langle Ax, x \rangle$ вещественно для всех x. Тогда

$$\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle x, Ax \rangle = \langle A^* x, x \rangle$$

и, значит, $\langle (A - A^*) x, x \rangle = 0$ для всех x.

Следовательно, $A = A^*$ в силу поляризации.

Пусть A: $E \to E$ — линейное отображение, Элемент $\xi \in E$ называется *собственным вектором* отображения A, если существует такое $\lambda \in \mathbf{C}$, что $A\xi = \lambda\xi$. Если $\xi \neq 0$, то мы будем говорить, что λ — *собственное значение* отображения A, принадлежащее ξ.

Предложение 6. *Пусть A эрмитово. Тогда все собственные значения отображения A вещественны. Если ξ, ξ' — собственные векторы $\neq 0$, обладающие собственными значениями λ, λ' соответственно, и если $\lambda \neq \lambda'$, то $\xi \perp \xi'$.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение, принадлежащее собственному вектору $\xi \neq 0$. Тогда $\langle A\xi, \xi \rangle = \langle \xi, A\xi \rangle$, и эти два числа равны соответственно $\lambda \langle \xi, \xi \rangle$ и $\overline{\lambda} \langle \xi, \xi \rangle$. Так как $\xi \neq 0$, то $\lambda = \overline{\lambda}$, т. е. λ вещественно. Далее, предположим, что ξ, ξ' и λ, λ' таковы, как описано выше. Тогда

$$\langle A\xi, \xi' \rangle = \lambda \langle \xi, \xi' \rangle = \langle \xi, A\xi' \rangle = \lambda' \langle \xi, \xi' \rangle,$$

откуда вытекает, что $\langle \xi, \xi' \rangle = 0$.

Лемма. *Пусть A: $E \to E$ — линейное отображение и* $\dim E \geqslant 1$. *Тогда у A существует по крайней мере один ненулевой собственный вектор.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathbf{C}[A]$ — кольцо, порожденное A над $\mathbf{C}$. Как векторное пространство над $\mathbf{C}$ оно содержится в кольце эндоморфизмов пространства E, имеющем такую же конечную размерность, какова размерность кольца всех матриц размера $n \times n$, где $n = \dim E$. Следовательно, существует ненулевой многочлен P с коэффициентами в $\mathbf{C}$, для которого $P(A) = 0$. Разложим P в произведение линейных множителей

$$P(X) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_m),$$

где $\lambda_j \in \mathbf{C}$. Тогда $(A - \lambda_1 I) \ldots (A - \lambda_m I) = 0$. Следовательно, все множители $A - \lambda_j I$ не могут быть изоморфизмами, а потому существует $\lambda \in \mathbf{C}$, такое, что $A - \lambda I$ — не изоморфизм. Значит, в его ядре имеется элемент $\xi \neq 0$ и мы получаем, что $A\xi - \lambda\xi = 0$. Это показывает, что ξ — ненулевой собственный вектор, что и требовалось.

Спектральная теорема (эрмитов случай). *Пусть E — ненулевое векторное пространство над полем комплексных чисел с положительно определенной эрмитовой формой, A: $E \to E$ — эрмитово линейное отображение. Тогда E обладает ортогональным базисом, состоящим из собственных векторов A.*

Доказательство. Пусть ξ_1 — некоторый ненулевой собственный вектор с собственным значением λ_1 и E_1 — подпространство, порожденное ξ_1. Тогда A отображает $E_1^{\perp}$ в себя, поскольку

$$\langle AE_1^{\perp}, \xi_1 \rangle = \langle E_1^{\perp}, A\xi_1 \rangle = \langle E_1^{\perp}, \lambda_1\xi_1 \rangle = \lambda_1 \langle E_1^{\perp}, \xi_1 \rangle = 0,$$

а потому $AE_1^{\perp}$ перпендикулярно ξ_1.

Так как $\xi_1 \neq 0$, то $\langle \xi_1, \xi_1 \rangle > 0$, и, поскольку наша эрмитова форма невырождена (будучи положительно определенной), имеем

$$E = E_1 \oplus E_1^{\perp}.$$

Ограничение нашей формы на $E_1^{\perp}$ является положительно определенным (если $\dim E > 1$). Из предложения 5 тотчас видно, что ограничение A на $E_1^{\perp}$ эрмитово. Следовательно, мы можем завершить наше доказательство по индукции.

Следствие 1. *В предположениях теоремы существует ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов A.*

Доказательство. Разделим каждый вектор ортогонального базиса на его норму.

Следствие 2. *Пусть E — ненулевое векторное пространство над полем комплексных чисел с положительно определенной эрмитовой формой f. Пусть g — другая эрмитова форма на E. Тогда существует базис в E, ортогональный и для f, и для g.*

Доказательство. Будем писать $f(x, y) = \langle x, y\rangle$. Так как форма f, будучи положительно определенной, неособая, то существует однозначно определенное эрмитово линейное отображение A, такое, что $g(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ для всех $x, y \in E$. Применим теорему к A и найдем описанный в ней базис, скажем $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Пусть λ_i — собственное значение, такое, что $Av_i = \lambda_i v_i$. Тогда

$$g(v_i, v_j) = \langle Av_i, v_j\rangle = \lambda_i \langle v_i, v_j\rangle,$$

а потому наш базис ортогонален также для g, что и требовалось показать.

§ 13. Спектральная теорема (симметрический случай)

Пусть E—векторное пространство над полем вещественных чисел, g — симметрическая положительно определенная форма на E. Если $A\colon E \to E$ — линейное отображение, то, как мы знаем, сопряженное к нему относительно g отображение ${}^tA$ определяется условием

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, {}^tAy\rangle$$

для всех $x, y \in E$. Мы говорим, что отображение A *симметрическое*, если $A = {}^tA$. Как и прежде, элемент $\xi \in E$ называется собственным вектором A, если существует число $\lambda \in \mathbf{R}$, такое, что $A\xi = \lambda\xi$, и если $\xi \neq 0$, то ξ называется собственным значением.

Спектральная теорема (симметрический случай). *Пусть E — ненулевое векторное пространство над полем вещественных чисел, $A\colon E \to E$—симметрическое линейное отображение. Тогда E обладает ортогональным базисом, состоящим из собственных векторов отображения A.*