Ограничение нашей формы на $E_1^{\perp}$ является положительно определенным (если $\dim E > 1$). Из предложения 5 тотчас видно, что ограничение A на $E_1^{\perp}$ эрмитово. Следовательно, мы можем завершить наше доказательство по индукции.

Следствие 1. *В предположениях теоремы существует ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов A.*

Доказательство. Разделим каждый вектор ортогонального базиса на его норму.

Следствие 2. *Пусть E — ненулевое векторное пространство над полем комплексных чисел с положительно определенной эрмитовой формой f. Пусть g — другая эрмитова форма на E. Тогда существует базис в E, ортогональный и для f, и для g.*

Доказательство. Будем писать $f(x, y) = \langle x, y \rangle$. Так как форма f, будучи положительно определенной, неособая, то существует однозначно определенное эрмитово линейное отображение A, такое, что $g(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ для всех $x, y \in E$. Применим теорему к A и найдем описанный в ней базис, скажем $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Пусть λ_i — собственное значение, такое, что $Av_i = \lambda_i v_i$. Тогда

$$g(v_i, v_j) = \langle Av_i, v_j \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle,$$

а потому наш базис ортогонален также для g, что и требовалось показать.

§ 13. Спектральная теорема (симметрический случай)

Пусть E—векторное пространство над полем вещественных чисел, g — симметрическая положительно определенная форма на E. Если $A\colon E \to E$ — линейное отображение, то, как мы знаем, сопряженное к нему относительно g отображение ${}^tA$ определяется условием

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, {}^tAy \rangle$$

для всех $x, y \in E$. Мы говорим, что отображение A *симметрическое*, если $A = {}^tA$. Как и прежде, элемент $\xi \in E$ называется собственным вектором A, если существует число $\lambda \in \mathbf{R}$, такое, что $A\xi = \lambda\xi$, и если $\xi \neq 0$, то ξ называется собственным значением.

Спектральная теорема (симметрический случай). *Пусть E — ненулевое векторное пространство над полем вещественных чисел, $A\colon E \to E$—симметрическое линейное отображение. Тогда E обладает ортогональным базисом, состоящим из собственных векторов отображения A.*

Доказательство. Мы сведем теорему к эрмитову случаю. Для этого введем *комплексную оболочку* (или *комплексификацию*) пространства E. Пусть

$$E_{\mathbf{C}} = E \oplus E$$

— прямая сумма E с собой. Если $a+bi$ — комплексное число, a, $b \in R$, и если (x, y) — элемент из $E_{\mathbf{C}}$, где x, $y \in E$, то определяем действие $\mathbf{C}$ на $E_{\mathbf{C}}$ формулой

$$(a+bi)(x, y) = (ax - by, bx + ay).$$

Прямое вычисление показывает, что $E_{\mathbf{C}}$ будет векторным пространством над $\mathbf{C}$. Если мы отождествим E с первым слагаемым, а именно с $(E, 0)$, то увидим, что

$$E_{\mathbf{C}} = E + iE,$$

и с учетом этого отождествления определенная выше операция мотивируется тем фактом, что

$$(a+bi)(x+iy) = ax - by + i(bx + ay).$$

Если $x+iy \in E_{\mathbf{C}}$, где x, $y \in E$, то определим $A_{\mathbf{C}}: E_{\mathbf{C}} \to E_{\mathbf{C}}$, положив

$$A_{\mathbf{C}}(x+iy) = Ax + iAy.$$

Тогда $A_{\mathbf{C}}$ является $\mathbf{C}$-линейным отображением $E_{\mathbf{C}}$ в себя, как видно непосредственно из определений.

Введем теперь эрмитову форму на $E_{\mathbf{C}}$. Если

$$v = x+iy, \quad w = x'+iy', \quad \text{где} \quad x, y, x', y' \in E,$$

то положим

$$\langle v, w\rangle_h = \langle x, x'\rangle + \langle y, y'\rangle + i\langle y, x'\rangle - i\langle x, y'\rangle.$$

Снова непосредственно проверяется, что h — эрмитова положительно определенная форма, так как g — симмметрическая положительно определенная форма. Кроме того, из определений тотчас вытекает, что отображение $A_{\mathbf{C}}$ эрмитово относительно h.

Применим спектральную теорему для эрмитовых отображений. Мы можем найти ортогональный базис $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ пространства $E_{\mathbf{C}}$ над $\mathbf{C}$, состоящий из собственных векторов отображения $A_{\mathbf{C}}$ с вещественными собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ соответственно. Запишем

$$\xi_\nu = x_\nu + iy_\nu,$$

где x_ν, $y_\nu \in E$. По определению собственного вектора имеем

$$A_{\mathbf{C}}\xi_\nu = \lambda_\nu\xi_\nu = \lambda_\nu x_\nu + i\lambda_\nu y_\nu.$$

Но

$$A_{\mathbf{C}}\xi_\nu = Ax_\nu + iAy_\nu.$$

Следовательно, $Ax_\nu = \lambda_\nu x_\nu$ и $Ay_\nu = \lambda_\nu y_\nu$. Среди собственных векторов $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ отображения A заведомо имеется n линейно независимых. Дополнительная ортогонализация Грама — Шмидта тех из них, которые соответствуют одному и тому же собственному значению λ, приводит к искомому ортогональному базису для E над $\mathbf{R}$. Теорема доказана.

Замечания. Спектральные теоремы справедливы над любым вещественно замкнутым полем; наши доказательства сохраняются без изменений. Кроме того, эти доказательства разумным образом близки к тем, которые могли бы быть даны в анализе для гильбертовых пространств и компактных операторов. Существование собственных значений и собственных векторов, однако, должно быть доказано другим методом, например, с использованием теоремы Гельфанда, которую мы фактически доказали в гл. XII, или вариационного принципа (т. е. нахождения максимума или минимума квадратичной функции, зависящей от оператора).

Следствие 1. *В предположениях теоремы существует ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов отображения A.*

Доказательство. Разделим каждый вектор ортогонального базиса на его норму.

Следствие 2. *Пусть E — ненулевое векторное пространство над полем вещественных чисел с положительно определенной симметрической формой f. Пусть g — другая симметрическая форма на E. Тогда существует базис E, ортогональный и для f, и для g.*

Доказательство. Будем писать $f(x, y) = \langle x, y \rangle$. Так как форма f, будучи положительно определенной, неособая, то существует однозначно определенное симметрическое линейное отображение A, такое, что $g(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ для всех $x, y \in E$. Применим к A теорему и найдем указанный в ней базис. Ясно, что это ортогональный базис для g (ср. аналогичное доказательство в эрмитовом случае).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть E — векторное пространство над полем k и g — билинейная форма на E. Предположим, что $g(y, x) = 0$ всякий раз, когда $g(x, y) = 0$ для какой-нибудь пары $x, y \in E$. Показать, что g либо симметрическая, либо знакопеременная.

2. Указать явно, каким образом $WG(k)$ гомоморфно отображается на $W(k)$.

3. Показать, что группа $WG(k)$ может быть представлена в виде гомоморфного образа $\mathbf{Z}[k^*/k^{*2}]$. [*Указание*: использовать существование ортогонального базиса.]

4. Пусть E — модуль над $\mathbf{Z}$ свободный, размерности $n \geqslant 1$, и пусть f — билинейная знакопеременная форма на E. Показать, что существуют базис $\{e_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и целое число r, такие, что $2r \leqslant n$,

$$e_1 \cdot e_2 = a_1, \quad e_3 \cdot e_4 = a_2, \ldots, e_{2r-1} \cdot e_{2r} = a_r,$$

где $a_1, \ldots, a_r \in \mathbf{Z}$, $a_i \neq 0$ и a_i делит a_{i+1} для $i = 1, \ldots, r-1$ и, наконец, $e_i \cdot e_j = 0$ для всех других пар индексов $i \leqslant j$. Показать, что идеалы $\mathbf{Z}a_i$ однозначно определены. [*Указание*: взять гомоморфизм $\varphi_f: E \to E^*$ модуля E в дуальный модуль над $\mathbf{Z}$ и рассмотреть $\varphi_f(E)$ как свободный подмодуль в E^*.] Обобщить на кольца главных идеалов, когда вы узнаете основную теорему для модулей над этими кольцами.

5. Пусть E — конечномерное пространство над R, g — симметрическая положительно определенная форма на E, A — симметрический относительно g эндоморфизм пространства E. По определению $A \geqslant 0$ означает, что $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in E$. Показать, что $A \geqslant 0$ в том и только в том случае, если все собственные значения A не меньше 0.

6. Доказать все свойства пфаффиана, сформулированные в „Геометрической алгебре“, стр. 142.

7. Теорема Витта справедлива и для знакопеременных форм. Доказать (или прочитать у Артина или Бурбаки).

8. Показать, что пфаффиан знакопеременной матрицы размера $n \times n$ равен 0, если n нечетно.

9. Дать определение отображений степени > 2 из одного модуля в другой. [*Указание*: для степени 3 рассмотреть выражение

$$f(x+y+z) - f(x+y) - f(x+z) - f(y+z) + f(x) + f(y) + f(z).]$$

Обобщить на отображения высших степеней утверждение, доказанное для квадратичных отображений (т. е. единственность различных полилинейных отображений, входящих в их определения).

10. (а) Пусть E — конечномерное пространство над полем комплексных чисел и $h: E \times E \to \mathbf{C}$ — эрмитова форма

$$h(x, y) = g(x, y) + if(x+y),$$

где f, g принимают вещественные значения. Показать, что g, f — $\mathbf{R}$-билинейные формы: g — симметрическая и f — знакопеременная.

(б) Пусть E — конечномерное пространство над $\mathbf{C}$, $g: E \times E \to \mathbf{C}$ — $\mathbf{R}$-билинейная форма. Предположим, что для всех $x \in E$ отображение $y \longmapsto g(x, y)$ C-линейно и что R-билинейная форма

$$f(x, y) = g(x, y) - g(y, x)$$

вещественнозначна на $E \times E$. Показать, что на E существуют эрмитова форма h и симметрическая $\mathbf{C}$-билинейная форма ψ, такие, что $2ig = h + \psi$. Показать, что h и ψ однозначно определены.

11. Показать, что в условиях эрмитовой спектральной теоремы E обладает разложением в прямую сумму над $\mathbf{R}$, $E = F + iF$, таким, что E изоморфно комплексной оболочке F и A индуцирует линейное симметрическое отображение на F.

12. Пусть E — конечномерное пространство над полем комплексных чисел с положительно определенной эрмитовой формой, S — некоторое множество (C-линейных) эндоморфизмов E, не обладающее другими инвариантными подпространствами, кроме 0 и E (это означает, что если F — подпространство в E и $BF \subset F$ для всех $B \in S$, то $F = 0$ или $F = E$). Пусть A — эрмитово отображение E в себя, такое, что $AB = BA$ для всех $B \in S$. Показать, что $A = \lambda I$ для некоторого вещественного числа λ. [*Указание*: показать, что у A имеется точно одно собственное значение. Если бы было два собственных значения, скажем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то можно было бы найти два многочлена f и g с вещественными коэффициентами, для которых $f(A) \neq 0$, $g(A) \neq 0$, но $f(A)\,g(A) = 0$. Взять в качестве F ядро эндоморфизма $g(A)$ и получить противоречие.]

13. Пусть E обозначает то же, что и в упражнении 12, T — C-линейное отображение E в себя и

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*).$$

Показать, что A эрмитово. Показать, что T можно записать в виде $A + iB$, где A, B эрмитовы и однозначно определены.

14. Пусть S — коммутативное множество C-линейных эндоморфизмов конечномерного пространства E, не имеющее инвариантного подпространства, отличного от 0 или E. Предположим, что $B^* \in S$, как только $B \in S$. Показать, что всякий элемент из S имеет вид αI для некоторого комплексного числа α и, следовательно, E одномерно. [*Указание*: пусть $B_0 \in S$. Положим

$$A = \frac{1}{2}\left(B_0 + B_0^*\right).$$

Показать, что $A = \lambda I$ для некоторого вещественного λ.]

15. Эндоморфизм B пространства E называется *нормальным*, если B коммутирует с B^*. Сформулировать и доказать спектральную теорему для нормальных эндоморфизмов.

16. Пусть E — конечномерное векторное пространство над полем вещественных чисел, $\langle\ ,\ \rangle$ — симметрическая положительно определенная форма на E, Ω — невырожденная знакопеременная форма на E. Показать, что существует разложение в прямую сумму

$$E = E_1 \oplus E_2,$$

обладающее следующим свойством. Если элементы $x, y \in E$ записаны в виде

$$x = (x_1, x_2), \quad \text{где} \quad x_1 \in E_1 \quad \text{и} \quad x_2 \in E_2,$$
$$y = (y_1, y_2), \quad \text{где} \quad y_1 \in E_1 \quad \text{и} \quad y_1 \in E_2,$$

то $\Omega(x, y) = \langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_1\rangle$. [*Указание*: использовать следствие 2 из теоремы 6. Показать, что эндоморфизм A — положительно определенный (см. упражнение 18), взять квадратный корень из A и преобразовать при его помощи прямое разложение, полученное в этом следствии.]

17. Пусть E — векторное пространство над полем вещественных чисел (*как обычно, конечномерное*). *Для всякого эндоморфизма A* пространства E примем за его *норму* $|A|$ наибольшую нижнюю грань всех чисел C, для которых $|Ax| \leqslant C|x|$. Показать, что эта норма удовлетворяет неравенству треугольника. Показать, что ряд

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots$$

сходится и что если A коммутирует с B, то $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Показать, что если A достаточно близок к I, то ряд

$$-\log(A) = \frac{(I-A)}{1} + \frac{(I-A)^2}{2} + \dots$$

сходится, и если A коммутирует с B, то

$$\log(AB) = \log A + \log B.$$

18. Пусть пространство E обладает фиксированной положительно определенной симметрической билинейной формой. Мы будем называть E *гильбертовым пространством* (конечномерным). Линейный автоморфизм A пространства E называется *гильбертовым*, если он является автоморфизмом формы, т. е. ${}^tAA = I$. В настоящих упражнениях мы будем писать A^* вместо ${}^tA$. Пусть A — симметрический эндоморфизм на E. Мы будем говорить, что A — *положительно определенный*, если $\langle Ax, x\rangle > 0$ для всех $x \in E$, $x \neq 0$.

Доказать: если A — симметрический (соответственно знакопеременный), то $\exp(A)$ — симметрический положительно определенный (соответственно гильбертов). Если A — линейный автоморфизм, достаточно близкий к I и являющийся симметрическим положительно определенным (соответственно гильбертовым), то $\log A$ — симметрический (соответственно знакопеременный).

19. Используя спектральную теорему, показать, что $\log A$ можно определить, когда A — симметрический положительно определенный, не обязательно близкий к I. Показать, что любой автоморфизм A пространства E может быть записан единственным образом в виде произведения $A = HP$, где H — гильбертов, а P — симметрический положительно определенный. [*Указание*: заметить, что A^*A — симметрический положительно определенный, и взять $P = (A^*A)^{1/2}$, где квадратный корень находится с помощью спектральной теоремы. Положив $H = AP^{-1}$, получить существование искомого произведения. Для единственности предположить, что $A = H_1P_1$, и положить $H_2 = PP_1^{-1}$. Тогда $I = H_2^*H_2$; используя равенства $P^* = P$, $P_1^* = P_1$, заключить, что $P^2 = P_1^2$. Взять log, разделить на 2 и, взяв exp, заключить, что $P = P_1$.]

20. (Тейт) Пусть E, F — полные нормированные векторные пространства под полем вещественных чисел и $f\colon E \to F$ — отображение, обладающее следующим свойством. Существует число C, такое, что для всех $x, y \in E$ имеем

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant C.$$

Показать, что существует единственное линейное отображение $g\colon E \to F$, для которого норма $|g - f|$ ограничена (т. е. $|g(x) - f(x)|$ ограничена как функция от x). Обобщить на билинейный случай. [*Указание*: положить

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}.]$$